ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ВАЛУЙСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ»

Рассмотрено
на заседании ЦМК преподавателей
общеобразовательного цикла
____________ Тютюнникова Г. В.
Протокол № 1 »31.08. 2020 года

Согласовано
заместитель директора по УР
____________Кошман А.В.
«31» 08 2020года

Комплект контрольно-оценочных средств

для проведения промежуточной аттестации

по ОУД.04 МАТЕМАТИКА

в рамках основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) по профессии: 15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике

Разработчик:

Синченко Е.В. преподаватель

Валуйки

Формы контроля и оценивания учебной дисциплины

УД	Форма контроля и оценивания	
	Промежуточная аттестация	**Текущий контроль**
Математика	Экзамен	Контрольная работа
		Практическая работа

1. Паспорт комплекта оценочных средств

Пояснительная записка

Контрольно-оценочные средства по дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по профессии: 15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике

Контрольно-измерительные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «математика»

Контрольно-измерительные средства составлены в соответствии с требованиями рабочей программы по дисциплине «математика». Учебным планом на изучение дисциплины отводится 422ч, в том числе 106 часов самостоятельная работа

В результате освоения дисциплины обучающейся должен обладать предусмотренными ФГОС по профессии 15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике следующими общими компетенциями, включающими в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, исходя из цели и способов ее достижения, определенных руководителем.

ОК 3. Анализировать рабочую ситуацию, осуществлять текущий и итоговый контроль, оценку и коррекцию собственной деятельности, нести ответственность за результаты своей работы.

ОК 4. Осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, клиентами.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать:**

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике,
- историю развития понятия числа, создание математического анализа, возникновение и развитее геометрии,
- универсальный характер законов логики математических рассуждений и их применимость во всех областях человеческой деятельности,
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	**Формы и методы контроля и оценки результатов обучения**
использовать математические методы при решении задач, необходимых в повседневной жизни, для изучения смежных дисциплин,	*Фронтальный, индивидуальный опрос, Тестирование, Оценка выполнения самостоятельных работ.*
применять математические методы к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе.	*Фронтальный, индивидуальный опрос, Тестирование, Оценка выполнения самостоятельных работ.*
значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике,	*Фронтальный, индивидуальный опрос, Тестирование, Оценка выполнения самостоятельных работ.*
историю развития понятия числа, создание математического анализа, возникновение и развитее геометрии,	*Фронтальный, индивидуальный опрос, Тестирование, Оценка выполнения самостоятельных работ.*
универсальный характер законов логики математических рассуждений и их применимость во всех областях человеческой деятельности,	*Фронтальный, индивидуальный опрос, Тестирование, Оценка выполнения самостоятельных работ.*
вероятностный характер различных процессов окружающего мира.	*Фронтальный, индивидуальный опрос, Тестирование, Оценка выполнения самостоятельных работ.*

2. Комплект оценочных средств

2.1. Задания для проведения экзамена

Направлены на выявление следующих умений:

находить приближённые вычисления

выполнять тождественные преобразования со степенными, логарифмическими и тригонометрическими выражениями;

использовать свойства элементарных функций при решении задач и упражнений;

применять свойства прямых и плоскостей в пространстве при решении задач;

строить графики показательных, логарифмических и тригонометрических функций, выполнять их преобразования;
производить действия с векторами;
вычислять производные и первообразные, определённые интегралы, применять определённый интеграл для нахождения площади криволинейной трапеции;
решать задачи на вычисление площадей поверхностей и объёмов геометрических тел;
решать линейные и квадратные, тригонометрические, иррациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства, системы неравенств;
уметь применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности

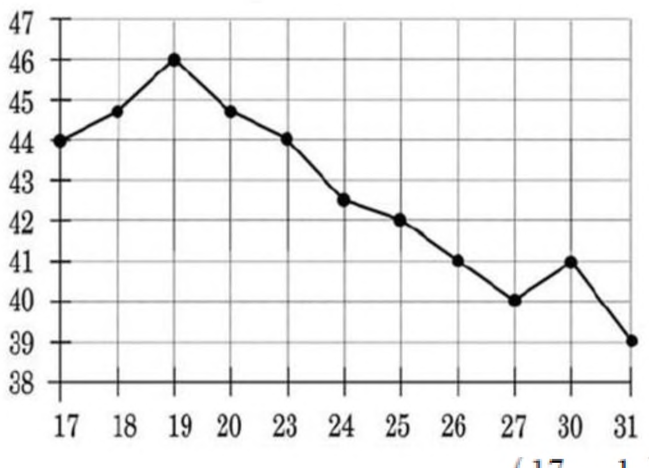
Вариант 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1–10 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы в бланк ответов (часть 1). Единицы измерений писать не нужно. Каждое верно выполненное задание 1-10 оценивается в 1 балл.

1) Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в соотношении 3:17. Какой процент в фарше составляет свинина?

2) На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цены барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена нефти на момент закрытия торгов была больше 43 долларов США за баррель

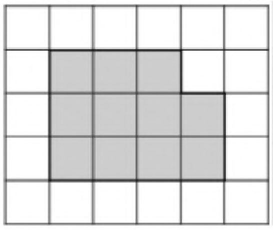


.

3) Найдите значение выражения $\left(\frac{17}{25}-\frac{1}{17}\right)\cdot\frac{17}{4}$.

4) Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c вычисляется по формуле $S=2(ab+ac+bc)$. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его ребра имеют длины 2, 5 и 6

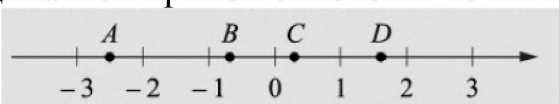
5) План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1м×1м. Найдите площадь участка, выделенного на плане. Ответ дайте в квадратных метрах



6) Найдите корень уравнения $\log_5(2x+9)=-1$.

7) Найдите значение выражения $(7\cdot10^5)\cdot(1{,}3\cdot10^{-7})$.

8) На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D



Число m равно $\sqrt{0{,}15}$

Установите соответствие между указанными точками и числами в правом столбце, которым они соответствуют

ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $-\frac{1}{m}$
B	2) m^2
C	3) $4m$
D	4) $m-1$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер

A	B	C	D

9) Образующая конуса равна 12 см и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.

10) Найдите значение выражения: $-18\sqrt{2}\sin(-135^{\circ})$

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 11–15 используйте бланк ответов (часть 2) . Запишите сначала номер выполняемого задания (11, 12 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво. Количество баллов, выставленных за

выполнение заданий 11–15, зависит от полноты решения и правильности ответа, максимально за верно выполненное задание 11-15, можно получить 2 балла.

11) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 5x + 6$ и осью OX.

12) Докажите тождество $1 + \mathrm{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

13) Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$

14) Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+7x+10) > -2$

15) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=2x^3-3x^2-12x+1$ на отрезке [4;5].

16) В основании правильной треугольной пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 6. Боковое ребро пирамиды равно 8. Точки D и E — середины ребер AC и MB соответственно. Через точки D и E проведена плоскость γ , параллельная ребру MC.
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью γ — прямоугольник.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью γ .

17) Решите неравенство

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|} - 9}{x} \geq 0.$$

Вариант 2

Часть 1

Ответом к заданиям 1–10 является целое число или конечная десятичная
дробь. Запишите ответы в бланк ответов (часть 1). Единицы измерений писать не нужно. Каждое верно выполненное задание 1-10 оценивается в 1 балл.

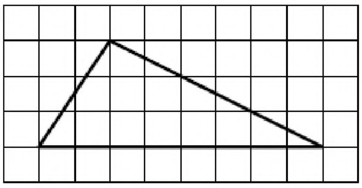
1) Набор полотенец, который стоит 250 рублей продается со скидкой 18%, сколько стоят два набора со скидкой?

2) Установка двух счетчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 рублей. До установки счетчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счетчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1400 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев ежемесячная экономия по оплате воды превысит затраты на установку счетчиков, если тарифы на воду не изменятся?

3) Найдите значение выражения $\left(7\cdot 10^5\right)\cdot\left(1{,}3\cdot 10^{-7}\right).$

4) Среднее геометрическое чисел a, b, c задается по формуле $g = \sqrt[3]{abc}$.
Вычислите среднее геометрическое чисел 2, 8, 32

5) На клетчатой бумаге с размером клетки 1м×1м изображен треугольник Найдите его площадь?



6) Найдите значение выражения $\sqrt{99} \cdot \sqrt{11}$.

7) Найдите корень уравнения $\log_5(2x+9) = -1$.

8) Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями

НЕРАВЕНСТВА

А) $(x-2)^2(x-4)<0$

Б) $\frac{(x-4)^2}{x-2}>0$

В) $(x-2)(x-4)<0$

Г) $\frac{x-2}{x-4}>0$

РЕШЕНИЯ

1) $x<2$ или $2<x<4$

2) $x<2$ или $x>4$

3) $2<x<4$

4) $2<x<4$ или $x>4$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер

А	Б	В	Г

9) По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r=1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

10) В коробке вперемешку лежат чайные пакетики с черным и зеленым чаем, одинаковые на вид, причем с черным чаем в 9 раз больше чем пакетиков с зеленым. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки пакетик окажется с зеленым чаем

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 11–15 используйте бланк ответов (часть 2) . Запишите сначала номер выполняемого задания (11, 12 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво. Количество баллов, выставленных за

выполнение заданий 11–15, зависит от полноты решения и правильности ответа, максимально за верно выполненное задание 11-15, можно получить 2 балла.

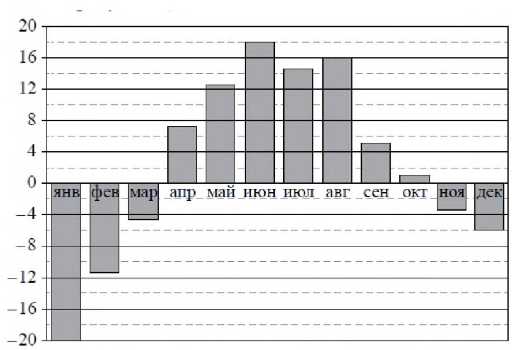
11) Два металлических куба с ребрами 1 см и 2 см сплавлены в один куб. Определите полную поверхность этого куба?
12) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 2$, x=-1, x=2 и осью OX.
13) Решите уравнение $\log_2(2x + 1) = \log_2 3 + 1.$
14) Решите неравенство $\log_2(x^2-13x+30) < 3$.
15) Найдите наибольшую и наименьшую значения функции $y=2x^3+3x^2-12x-1$ на отрезке [-1; 2].
16) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC точки E, F и G — середины рёбер B_1C_1, AC и AA_1.
а) Докажите, что прямая GF параллельна плоскости A_1EC.
б) Найдите объёмы многогранников, на которые плоскость A_1EC делит призму $ABCA_1B_1C_1$, если её объём равен 18.

17) Решите неравенство $\dfrac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\dfrac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5.$

Вариант 3

Часть 1
Ответом к заданиям 1–10 является целое число или конечная десятичная
дробь. Запишите ответы в бланк ответов (часть 1). Единицы измерений писать не нужно. Каждое верно выполненное задание 1-10 оценивается в 1 балл.
1) Автомобиль проехал 17 километров за 15 мин. Сколько километров он проедет за 18 минут, если будет ехать с той же скоростью?

2) На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру во второй половине года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3) Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{32}}{5\sqrt{8}}$.

4) В треугольнике *ABC* известно, что *AB* =*BC* = 25, *AC*=14. Найдите длину медианы *BM*.

5) В сосуд цилиндрической формы налили воду до уровня 80 см. Какого уровня достигнет вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в 4 раза больше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

6) Найдите корень уравнения $-3+4(-7+5x)=9x-9$.

7) Каждому из четырех неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\log_2(x-1)<1$	1) $x<1$
Б) $3^{-2x}>\frac{1}{9}$	2) $1<x<3$ или $x>3$
В) $\frac{x-1}{(x-3)^2}>0$	3) $1<x<3$
Г) $x^2-4x+3>0$	4) $x<1$ или $x>3$

Впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий числу номер

А	Б	В	Г

8) На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 5 с мясом, 8 с капустой, и 3 с вишней. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того,
что он окажется с капустой.

9) В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t)=H_0-$

$\sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 м/с^2$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объем воды?

10) В чемпионате по гимнастике участвуют 75 спортсменок: 15 из Чехии, 30 из Словакии, а остальные – из Австралии. Порядок, в котором выступают спортсменки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Австралии

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 11–15 используйте бланк ответов (часть 2) . Запишите сначала номер выполняемого задания (11, 12 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво. Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 11–15, зависит от полноты решения и правильности ответа, максимально за верно выполненное задание 11-15, можно получить 2 балла.

11) Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-18} = \frac{1}{27}$

12) Решите неравенство $\log_3(x^2 - 2x) > 1$.

13) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$

14) Найдите значение производной функции y= $\sqrt{2x+5}$ в точке $x_0=2$.

15) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$, и координатными осями.

16) В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник со стороной 4. Высота призмы равна 2. Точка D — середина ребра AB, точка E — середина ребра B_1C_1 . Через точки D и E проведена плоскость $\propto$, параллельная ребру BB_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью $\propto$ — прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью $\propto$.

17) Решите неравенство

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leq 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}$$

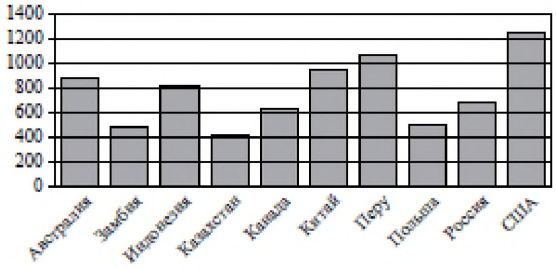
Вариант 4

Часть 1

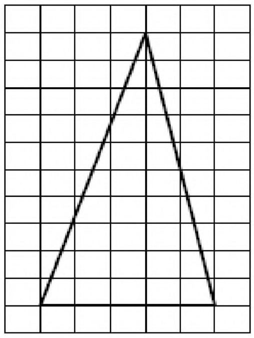
Ответом к заданиям 1–10 является целое число или конечная десятичная
дробь. Запишите ответы в бланк ответов (часть 1). Единицы измерений писать не нужно. Каждое верно выполненное задание 1-10 оценивается в 1 балл.

Футболка стоила 800 рублей. Затем цена была снижена на 15%. Сколько рублей сдачи с 1000 рублей должен получить покупатель при покупке этой футболки после снижения цены?

На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Канада?



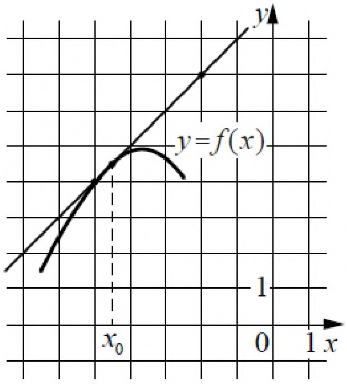
На клетчатой бумаге с размером клетки 1см ×1 см, изображён треугольник. Найдите его площадь.



Вычислите $625^{-2,25} \cdot 25^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{25}{9}}$

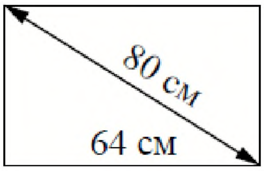
На семинар приехали 6 учёных из Норвегии, 5 из России и 9 из Испании. Каждый учёный подготовил один доклад. Порядок докладов определяется случайным образом. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из России.

6.На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0



.

7. Диагональ прямоугольного телевизионного экрана равна 80 см, а ширина экрана — 64 см. Найдите высоту экрана. Ответ дайте в сантиметрах.



8. Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому

оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

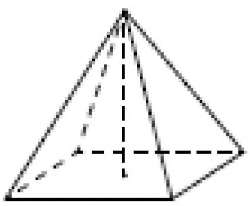
ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $\log_2 20$	1) $[1; 2]$
Б) $\frac{4}{3}$	2) $[2; 3]$
В) $\sqrt{11}$	3) $[3; 4]$
Г) $0{,}35^{-1}$	4) $[4; 5]$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий отрезку номер.

А	Б	В	Г

9. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1.4} = const$, где p (атм.) — давление в газе, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объем можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

10. Найдите объем правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, боковое ребро равно $\sqrt{17}$.



Часть 2
Для записи решений и ответов на задания 11–15 используйте бланк ответов (часть 2) . Запишите сначала номер выполняемого задания (11, 12 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво. Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 11–15, зависит от полноты решения и правильности ответа, максимально за верно выполненное задание 11-15, можно получить 2 балла.

10. Найдите корень уравнения $\log_5(2x+9)=-1$.

11) Найдите значение выражения $\dfrac{6}{\sin\left(\frac{11}{4}\pi\right)\cdot\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right)}$

12) Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-3x+3$ на отрезке $[0\,,\,9]$

13) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^2(\pi-x)=\cos x$.

14) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$ и $y=-x+3$.

16) Дана правильная треугольная призма $ABCA1B1C1$, все рёбра которой равны 6. Точка T — середина ребра $A1B1$.
а) Докажите, что сечение призмы плоскостью $AC1T$ является прямоугольным треугольником.
б) Найдите угол между плоскостями $AC1T$ и ABC .

17) Решите неравенство

$$\frac{105}{\left(2^{4-x^2}-1\right)^2}-\frac{22}{2^{4-x^2}-1}+1\geq 0$$

Критерии оценивания работ.
За верно выполненные задания В1-В10 – 1 балл, за верно выполненные задания В11-В17 – 2 балла ставиться в том случае, если нет ошибок в логическом рассуждении и решении, задание решено рациональным способом.
14-18 баллов оценка «3»
19-22 баллов оценка «4»
23-24 балла оценка «5»

Условия выполнения задания
1. Место (время) выполнения задания: *Кабинет математики*
2. Максимальное время выполнения задания: *300 мин.*
3. Используемое оборудование (инвентарь), расходные материалы, литература и другие источники: *раздаточный материал, плакаты, справочники, чертежные принадлежности*

2. 2. Стартовая диагностика подготовки обучающихся по школьному курсу математики

Входная контрольная работа проводится с целью проверки освоения обучающимися содержания образования по математике. Форма работы обеспечивает полноту проверки за счет включения заданий, составленных на материале основных разделов предмета «Математика» в школе: уравнения, неравенства, степени, действия с действительными числами, проценты, графики элементарных функций, теорема Пифагора.

Время на выполнение работы 45 минут.

В результате выполнения контрольной работы обучающиеся должны показать:

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Показатели оценки результата
Умения:	
решать полные квадратные уравнения;	применяет формулы дискриминанта и корней квадратного уравнения для решения уравнений;
решать линейные неравенства;	раскрывает скобки, приводит подобные слагаемые, использует свойства неравенств;
выполнять вычисления с действительными числами;	применяет правила выполнения арифметических действий над действительными числами в рамках программных требований;
выполнять действия со степенями и находить значения выражения при заданном значении переменной;	владеет свойствами степеней и находит значение выражения, содержащего степень;
строить графики функций;	строит графики линейных функций;
решать геометрические задачи с использованием теоремы Пифагора;	решает задачи с использованием Теоремы Пифагора;
находить проценты от числа;	находит проценты от числа и решает задачи на проценты;
упрощать выражения, содержащие дроби.	применяет формулы сокращённого умножения для упрощения алгебраических выражений;
Знания:	
формулы дискриминанта, корней квадратного уравнения;	воспроизводит формулы дискриминанта и корней квадратного уравнения;
правила раскрытия скобок; определение подобных слагаемых, свойства неравенств;	формулирует правила раскрытия скобок, определение подобных слагаемых, перечисляет свойства неравенств;

арифметические действия на множестве действительных чисел;	перечисляет последовательность действий в выражениях с действительными числами; формулирует правила действий на множестве действительных чисел;
определение степени с действительным показателем, свойства степени;	формулирует определение и перечисляет свойства степени;
свойства линейной функции и её график;	определяет графики линейных функций и описывает их свойства;
теорема Пифагора;	обосновывает теорему Пифагора;
формулы сокращённого умножения.	выделяет формулы сокращённого умножения, иллюстрирует их применение на практике.

Критерии оценки контрольной работы
Каждое верно выполненное задание оценивается в 1 балл
10 баллов – оценка «5»
9-8 баллов – оценка «4»
7-6 баллов – оценка «3»
Менее 6 баллов – оценка «2»

1 вариант

1. Расположите в порядке возрастания числа 0,0405; 0,04; 0,504
Ответ: ______________________

2. Решить уравнение $x\,(x - 5) = -4$ Ответ:
____

2. Решите неравенство $6x - 3 < -17 - (-x - 5)$
Ответ: ______________________________

3. Вычислить $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right):(1-0{,}2)-3\frac{23}{24}$.
Ответ: ______________________________

4. Представить в виде степени и найти значение выражения $\frac{a^5 \cdot a^{-8}}{a^{-2}}$ при $a = 6$.
Ответ: ______________________________

6. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а один из катетов
6 см. Найти второй катет.
Ответ: ______________________________

7. Банк выплачивает ежегодно 8% от суммы вклада. Какой станет сумма через год, если первоначальный вклад составлял 7600 рублей?
Ответ: ______________________________

8. Упростить выражение $\frac{a}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$. Ответ: ______________________

9. На экзамене 50 билетов, Руслан не выучил 5 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный билет.
Ответ: _______________________________

10 .Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1= 0,5$, $b_{n+1} =3b_n$. Найдите b_5 .
Ответ: ________________________________

2 вариант

1. Расположите в порядке убывания числа: 0,0543; 0,43; 0,053.
Ответ: _______________________________

2. Решить уравнение $x(x - 4) = -3$
Ответ: _______________________________

3. Решите неравенство $5 \cdot (x + 4) < 2 \cdot (4x - 5)$
Ответ: _______________________________

4. Вычислить $\left(\frac{5}{7}:\frac{2}{3}-\frac{1}{\frac{4}{3}-\frac{2}{5}}\right):\frac{8}{11}+1.$
Ответ: _______________________________

Представить в виде степени и найти значение выражения $\frac{c^7 \cdot c^{-3}}{c^6}$ при $c = 4$.
Ответ: _______________________________

6. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а один из катетов 8 см. Найти второй катет.
Ответ: _______________________________

7. Банк выплачивает ежегодно 8% от суммы вклада. Какой станет сумма через год, если первоначальный вклад составлял 8600 рублей?
Ответ: _______________________________

8. Упростить выражение $\frac{x-y}{x+y}-\frac{y}{x-y}$.
Ответ: _______________________________

9. На экзамене 60 билетов, Андрей не выучил 20 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный билет.
Ответ: __________________________________

10.Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: $a_1=3$, $a_{n+1}= a_n -2,5$. Найдите a_4
Ответ:___________________________________

2. 3. Задания для тематического контроля (контрольные работы)

Вариант 1

1. Найдите значение числового выражения

а) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$ б) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$ в) $27^{\log_3 2}+\log_{18}2+2\log_{18}3$

2. Решите уравнение

а) $x^3=4$ б) $x^6-64=0$ в) $\log_5 x=-1$ г) $\log_x 81=4$ д) $\log_7(x^2-2x-8)=1.$

3. Вычислите

а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}\cdot\sqrt[3]{-125}$ б) $\dfrac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$

4. Найдите x, если:

$\log_6 x=3\log_6 2+0{,}5\log_6 25-2\log_6 3$

5. Упростите выражение

$\dfrac{a-27}{a^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{3}}+9}$ б) $5^{1+\log_5 3}$

Вариант II

1. Найдите значение числового выражения

а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$ б) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}$ в) $8^{\log_2 3}+2\log_{12}2+\log_{12}3$

2. Решите уравнение

а) $x^6=5$ б) $x^7+128=0$ в) $\log_4 x=-3$ г) $\log_x 27=3$

д) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)=-1.$

3. Вычислите

а) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}\cdot\sqrt[4]{16}$ б) $\dfrac{\log_3 16}{\log_3 4}$

4. Найдите x, если:

$\log_4 x=\dfrac{1}{3}\log_4 216-2\log_4 10+4\log_4 3$

5. Упростите выражение

а) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{1}{2}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$ б) $10^{1+\lg 2}$

Контрольная работа № 2 по теме: «Основы тригонометрии»

Вариант 1

Вычислите

а) $4\sin\frac{\pi}{6}+3\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}+2\cos\frac{\pi}{3}$

б) $8\sqrt{3}\sin(-1200^o)$

2. Решите уравнения и неравенства

а) $2\sin\frac{x}{4}-\sqrt{3}=0$ б) $\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x)=0$ в) $\sin x=-\frac{1}{2}$ г) $\cos 4x=-1$

3. Известно, что $\sin\propto=\frac{5}{13}$ и $\propto\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ Найдите $\cos\propto$ и $\mathrm{tg}\propto$

4. Упростите выражение $\frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\propto\right)\sin(\pi-\propto)}{cos\left(\frac{3\pi}{2}-\propto\right)}$

5. Докажите тождество $\frac{sin2\propto+tg2\propto}{tg2\propto}=2\,cos^2\propto$

Вариант 2

Вычислите

а) $2\sin\frac{\pi}{6}+5\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+6\cos\frac{\pi}{3}$

б) $3cos(-420^o)$

2. Решите уравнения и неравенства а) $2\cos\frac{x}{2}+1=0$

б) $\cos(2\pi-x)$ x + sin + $\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}$ в) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

г) $\cos 3x=\frac{1}{2}$

3. Известно, что $\sin\propto=\frac{5}{13}$ и $\propto\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ Найдите $\cos\propto$ и tg

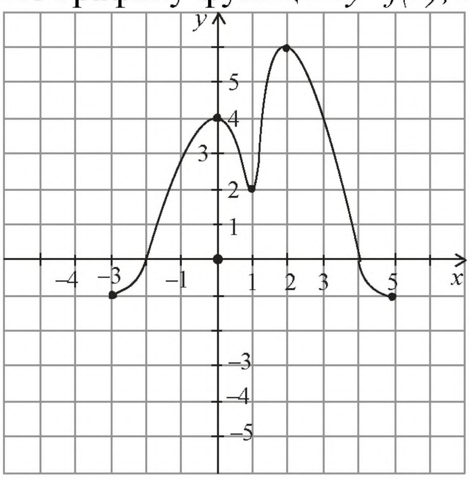
4. Упростите выражение $\frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\propto\right)\sin(\pi-\propto)}{cos\left(\frac{3\pi}{2}-\propto\right)}$

5. Докажите тождество $\frac{sin2\propto+tg2\propto}{tg2\propto}=2\,cos^2\propto$

Контрольная работа № 3 по теме «Функции, их свойства и графики»

1 Вариант

По графику функции *y=f(x), изображённому на рисунке , укажите :*



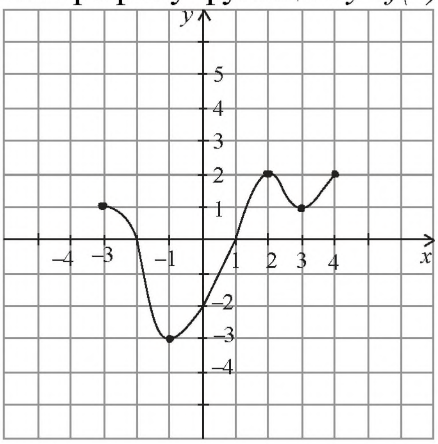
1)область определения функции;

2)нули функции;

3)чётность функции;
4)промежутки постоянного знака функции;
5)точки максимума и минимума функции;
6)промежутки монотонности;
7)наибольшее и наименьшее значение функции;
8)область значений функции
2.Найдите область определения и область значения функции:
а)y=3-2sinx   б)y=1g(x^2+5x)
3.Определите чётность (нечётность) функции :
а)y=-5cos(-4x) б)y=x5+$\frac{2}{x^2}$ в)y=$\sqrt{x^2-9}$.
4.Постройте графики функций: а)y=sin$\frac{1}{3}$x   б)y=4^x+1

Вариант 2

По графику функции *y=f(x), изображённому на рисунке, укажите :*



1)область определения функции;
2)нули функции;
3)чётность функции;
4)промежутки постоянного знака функции;
5)точки максимума и минимума функции;
6)промежутки монотонности;
7)наибольшее и наименьшее значение функции;
8)область значений функции.
2. Найдите область определения и область значения функции:
а)y=5-4cosx   б)y=1g(x^2+7x)
3. Определите чётность (нечётность) функции:
а)y=2sin3x б)y=$\frac{x-4}{x+9}$; в)y=$\frac{|x|+2}{x^2}$
4. Постройте графики функций: а)y=sin3x б) y=$\frac{1^x}{2}$+1

Контрольная работа № 4 по теме: «Вычисление интегралов и производной функций»

Вариант 1

1.Используйте формулы дифференцирования, найдите производную функции f(x) в точке x_0 если:
А)$f(x) = 2x^3 + 7x^2, x_0 = 2$;
Б)$f(x) = 3\sin x - \cos x + tgx, x_0 = \frac{\pi}{3}$;

В)$f(x)=2(3x-1)^{43}, x_0=0$
2. Вычислите интегралы
А)$\int_0^1 x^3+3x^2dx$; Б)$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\, dx$;
3.Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
А)$y=4-x^2, y=0;$ Б)$y=3\cos 2x,\ \ y=0,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{4}$
4.Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями y=2x+1, y=0, x=1, x=3
5. Вычислите предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$$a_n=\frac{n^5-3n^4+7n-1}{3-2n^3+3n^5}$$

Вариант 2
1.Используйте формулы дифференцирования, найдите производную функции f(x) в точке x_0 если:
А)$f(x)=5x^3-4x^2, x_0=2;$
Б)$f(x)=2\sin x+\cos x-\cot x, x_0=\frac{\pi}{6}$
В)$f(x)=3(2x-1)^{51}, x_0=2$
2. Вычислите интегралы
А$\int_0^1 x^3-2x^2\, dx$; Б)$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ \ dx$;
3.Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:
А)$y=9-x^2, y=0;$ Б)$y=4\sin 3x,\ \ y=0,\ 0\le x\le \frac{\pi}{3}$
4.Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями y=2x-3, y=0, x=2, x=4
5. Вычислите предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$$a_n=\frac{n-4n^2-5n^3+1}{n^4+n}$$

Контрольная работа № 5 по теме: «Уравнения и неравенства»

I вариант
Решите уравнения
а) $8-3x-x^2=(x-4)(x+2);$
б) $\sqrt{x^2-1}=x+1;$
в) $\frac{3x-1}{4}-\frac{4x+1}{3}=\frac{7}{12};$
г) 2^{x+3}=8;
д) $\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y=x-8, \\ y+x^2+6x=0. \end{cases}$
3.Решите неравенство:
$2\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{2-x}{6}>\frac{3x-2}{2}$.
II вариант
Решите уравнения

а) $3x^2+2x-1=(3x-1)(x+5)$
б) $\sqrt[3]{1-9x}=2x$;
в) $\frac{2x-3}{3}-\frac{x+2}{4}=\frac{5}{12}$;
г) $4^{x-1}=16^{x-1}$;
д) $\cos\frac{\pi x}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x=2-y \\ 2y^2-3x+1=0 \end{cases}$$
Решите неравенство:
$$\frac{4-3y}{2}<\frac{8y+1}{6}+15\left(y-\frac{2}{5}\right).$$

Контрольная работа №6 по теме «Измерения в геометрии»

Вариант 1

1.В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания ABC пересекаются в точке O. Площадь треугольника ABC равна 2; объём пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS.
2.Вычислите объём усечённого конуса, если радиусы его оснований равны 3 см и 9 см, а высота 6 см.
3.Найдите объём шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота конуса, образующего спектра, составляет треть диаметра шара.
4.Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Найдите площадь сечения, проходящего через две образующие, угол между которыми равен 45^0 и площадь боковой поверхности конуса.
5.Диаметр шара равен *d*. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 45^0 к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

Вариант 2

1.Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Найдите объём пирамиды, если все ее боковые ребра равны 13 см.
2.Вычислите объём конуса, если его высота 6 см, а площадь основания 42 см^2.
3.Найдите объём шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота соответствующего сегмента составляет часть диаметра шара.
4.Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь основания цилиндра равна 16π см^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
5.Площадь сечения шара плоскостью, проведенной через конец диаметра под углом 30^0 к нему, равна 75π см^2. Найдите диаметр шара

Контрольная работа №7 по теме «Координаты и векторы»

вариант

1. Упростить выражение $\overrightarrow{OP}$-$\overrightarrow{EP}$-$\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KA}$

2. Даны векторы $\vec{а}\{3;-5;2\}$ $\vec{в}\{0;7;-1\}$ $\vec{е}\{\frac{2}{3};0;0\}$. Найдите координаты векторов $\vec{a}+\vec{в}+\vec{c}$

3.Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$ если: А(-35;-17;20) В(-34;-5;8)

4.Даны векторы $\vec{а}=\overrightarrow{3\imath}-\overrightarrow{5\jmath}+\vec{k}$ $\vec{\imath}\{1;0;0\}$. Вычислите: $\overrightarrow{a\imath}$

5.Вычислите угол между векторами: $\vec{a}\{0;5;0\}$ $\vec{в}\{0;\sqrt{3};1\}$

2 вариант

1.Упростить выражения $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{MD}$

2.Даны векторы $\vec{a}\{3;-5;2\}$ $\vec{в}\{0;7;-1\}$ $\vec{d}\{-2.7;3.1;0.5\}$. Найдите координаты векторов $\vec{в}+\vec{а}+\vec{d}$

3.Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$ если: А (-35;-17;20) В(-34;-5;-8)

4.Даны векторы $\vec{в}=\vec{\jmath}+\overrightarrow{5k}$ $\vec{\jmath}\{0;1;0\}$. Вычислите: $\overrightarrow{в\jmath}$

5.Вычеслите угол между векторами : $\vec{а}\{-2.5;2.5;0\}$ $\vec{в}\{-5;5;5\sqrt{2}\}$

Критерии оценивания контрольных работ

Оценка «5»: ставиться в том случае, если обучающийся выполнил все 5 заданий и в логическом рассуждении и решении нет ошибок, все задания решены рациональным способом.

Оценка «4»: ставиться в том случае, если обучающимся было выполнено 4 задания и в логическом рассуждении не присутствует существенных ошибок, все задания решены рациональным способом, или решены все 5 заданий, но при решении допущены незначительные вычислительные ошибки (не более одной).

Оценка «3»: ставиться в том случае, если обучающимся было выполнено 3 задания и в логическом рассуждении не присутствует существенных ошибок, все задания решены рациональным способом, или решены все 5 заданий, но при решении допущены незначительные вычислительные ошибки (не более двух).

Оценка «2»: ставиться в том случае, если обучающимся было выполнено менее 3 заданий, или выполнены все 5 заданий в которых допущены существенные ошибки.

Перечень практических работ:

Практическая работа № 1 Арифметические действия над числами

Практическая работа № 2 Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений.

Практическая работа № 3 Сравнение числовых выражений.

Практическая работа №4 Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами.

Практическая работа №5 Решение иррациональных уравнений. Нахождение значений степеней с рациональными показателями.

Практическая работа №6 Сравнение степеней. Преобразования выражений, содержащих степени.

Практическая работа №7 Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому.

Практическая работа № 8 Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений

Практическая работа №9 Решение логарифмических уравнений

Практическая работа №10 Решение прикладных задач.

Практическая работа № 11 Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.

Практическая работа №12 Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения

Практическая работа №13 Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Практическая работа №15 Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

Практическая работа №16 Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Практическая работа №17 Примеры зависимостей между переменными в реальных процессах из смежных дисциплин

Практическая работа №18 Определение функций. Построение и чтение графиков функций. Исследование функции.

Практическая работа №19 Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций. Непрерывные и периодические функции.

Практическая работа №20 Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Практическая работа № 21Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции.

Практическая работа №22 Преобразования графика функции. Гармонические колебания. Прикладные задачи.

Практическая работа №23 Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства.

Практическая работа №24 Способы задания числовой последовательности, вычисления членов последовательности

Практическая работа №25 Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Практическая работа №26 Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций.

Практическая работа №27 Решение упражнений на вычисление производной

Практическая работа №28 Решение задач на применение производной к исследованию функций и построению функций

Практическая работа №29 Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции

Практическая работа №30 Решение задач по правилам вычисления первообразной Практическая работа №31Решение задач на вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Практическая работа №32 Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей

Практическая работа №33 Нахождения корней уравнения

3-4 семестр

Практическая работа №1 Нахождения корней уравнения
Практическая работа №2Равносильность уравнений.
Практическая работа №3 Преобразование уравнений.
Практическая работа №4 Основные приемы решения уравнений
Практическая работа №5 Решение систем уравнений
Практическая работа №6 Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств
Практическая работа №7 Решение задач на применение бинома Ньютона и треугольника Паскаля
Практическая работа №8 Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач
Практическая работа №9 Размещения, сочетания и перестановки
Практическая работа №10 Вычисление вероятностей. Представление числовых данных
Практическая работа №11 Понятие о задачах математической статистики. Решение практических задач с применением вероятностных методов
Практическая работа №12 Решение прикладных задач
Практическая работа №13 Взаимное расположение прямых и плоскостей.
Практическая работа №14 Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах.
Практическая работа №15 Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости.
Практическая работа №16 Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.
Практическая работа № 17 Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.
Практическая работа № 18 Параллельное проектирование и его свойства. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника.
Практическая работа №19Взаимное расположение пространственных фигур.
Практическая работа №20 Решение задач по теме «Многогранники»
Практическая работа №21 Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки
Практическая работа № 22 Площадь поверхности. Вычисление площадей поверхностей
Практическая работа № 23 Представление о правильных многогранниках
Практическая работа № 24 Виды симметрий в пространстве. Симметрии многогранников
Практическая работа № 25 Решение задач по теме «Тела вращения»
Практическая работа № 26 Площадь поверхности. Вычисление площадей и объемов
Практическая работа № 27 Решение задач на вычисление объемов многогранников и тел вращения

Практическая работа №28 Вычисление площадей и объемов
Практическая работа №29 Решение задач на составление уравнений прямой, плоскости, окружности, сферы.
Практическая работа №30 Решение задач на действия с векторами.
Практическая работа №31 Решение задач на нахождения расстояния между точками.
Практическая работа №32 Скалярное произведение векторов.
Практическая работа №33 Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Практическая работа № 1
Тема: Арифметические действия над числами
Цель: Научиться вычислять арифметические действия над числами
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради

Теоретический материал
Изучение математики начинается с натуральных чисел, т.е. с чисел 1, 2, 3, 4, 5,… . При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.
Дополнением натуральных чисел нулем и отрицательными числами (т.е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т.е. чисел 0, ± 1, ± 2, ± 3, … . При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.
При выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.
Бесконечную десятичную дробь 0,3333… называют *периодической*, повторяющуюся цифру 3 – ее *периодом*. Периодическую дробь 0,333… коротко записывают так: 0,(3); читается: «Ноль целых и три в периоде».
Периодическая дробь – это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби.
Если бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001…, в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 – два нуля и, вообще, после n – й цифры стоит n нулей, не является периодической. Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом*. Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.
Ход работы
Внимательно прочитайте теоретический материал
Повторить таблицу умножения.
Вспомнить: какие бывают множества чисел.

Повторить правила перевода дроби из периодической в обыкновенную.
Ответите письменно на вопросы

Перечислите множества чисел (натуральные, рациональные, иррациональные, действительные - примеры).

Какое множество включает все числа?

При округлении, когда мы прибавляем «1» к предыдущему числу, когда отбрасываем числа…..

При преобразовании бесконечной периодической дроби на что надо обратить внимание? ……..

Выполнить задания по образцу

Задание 1. Представить в виде бесконечной десятичной дроби числа. Выполнить деление столбиком, не используя калькулятор.

$$а)\frac{1}{7},\quad б)\frac{5}{\pi},\quad в)\frac{7}{13},\quad г)\frac{15}{19},\quad д)\frac{13}{29},\quad е)\frac{39}{41}.$$

(пример):

а) 10 | 7
7 | 0, 1428571…
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
10
7 и т.д.

Задание 2. Преобразовать бесконечную периодическую дробь в обыкновенную:

$а)0{,}3(12);$ $г)0{,}32(16)$

$б)2{,}13(7);$ $д)4{,}(521)$

Пример $в)0{,}5(72);$ $е)0{,}(035)$

Задание		Ответ
а)	0,3(12)	Пусть x = 0,312… / 10 10x = 3,12… / 100 1000x = 312,12 1000x – 10x = 312,12 – 3,12 990x = 309 $x = 309 : 990 = \frac{103}{330}$

Задание 3.

Число $\frac{9\cdot196\cdot625}{40\cdot49\cdot225}$ **равно**

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 0,5 $\boxed{3}$ 2,5 $\boxed{4}$ 2 $\boxed{5}$ 5.

Задание 4. Число $1996\frac{184}{995} - 1995\frac{21}{199} + \frac{24}{199}$ равно

$\boxed{1}$ 1,2 $\boxed{2}$ 0,2 $\boxed{3}$ $\frac{193}{398}$ $\boxed{4}$ $\frac{83}{398}$ $\boxed{5}$ 1.

Задание 5

$$\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3{,}(5)\right) - \frac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5 - 18\frac{2}{3}\cdot 11} - \frac{1}{18}$$

Практическая работа № 2

Тема: Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений

Цель: Научиться вычислять абсолютную и относительную погрешность

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, микрокалькулятор.

Теоретический материал

Модуль (абсолютная величина) разности между точным числом x и его приближенным значениемa называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа x и обозначается через α, т.е.$|x-a|=\alpha$.

Число a называется *приближенным значением* точного числа x с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa, т.е. $|x-a|\leq \Delta a$

ЧислоΔa называется *границей абсолютной погрешности* приближенного числа a.

По известной границе абсолютной погрешностиΔa находятся границы, в которых заключено точное значение числа x:

$(x=a\pm\Delta a) \Leftrightarrow (a - \Delta a\leq x \leq a +\Delta a)$

Относительной погрешностью δ приближенного значенияa числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a:

$\delta = \frac{\alpha}{a}$

Число ε называется *границей относительной погрешности.*

Границей относительной погрешности a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a : $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}$

Чем меньше относительная погрешность, тем выше качество измерений или вычислений. Относительная погрешность – величина безразмерная, что позволяет сравнивать качество измерений величин разной размерности.

Ход работы

1. Прочитайте внимательно теоретический материал
2. Ответе на вопросы:

Понятие абсолютной погрешности.

Понятие относительной погрешности.

3. Выполните задания пользуясь основными формулами для нахождения абсолютной и относительной погрешностей

Задание. Даны приближенные значения числа x= $\frac{2}{3}$; a_1=0,6; a_2=0,66; a_3=0,67. Какое из этих приближений является лучшим?

Площадь квадрата равна 24,5 ±0,4 (см^2). Найти границы измерения площади квадрата.

В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты равна 730 см. Что можно сказать о качестве этих двух измерений?

Найти относительную погрешность числа 6,8 , если обе цифры его верны в строгом смысле.

Выполните тест, ответы запишите в таблицу в тетради

I Вариант

1. Округлите до сотых 0,53748.

а) 0,5; б) 0,54; в) 0,53; г) 0,537; д) 0,5375.

2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{3}{22}$ числом $\frac{1}{7}$.

а) $-\frac{1}{154}$; б) $\frac{43}{154}$; в) $\frac{1}{154}$; г) $-\frac{43}{154}$; д) другой ответ.

3. В каких границах заключено число y , если $y = 20,6 \pm 0,72$?

а) $19,88 \le y \le 21,32$; б) $13,4 \le y \le 27,8$; в) $20 \le y \le 21$; г) $19,32 \le y \le 21,88$;

д) определить нельзя.

4. Пусть $x = 10,68 \pm 0,15$. Каким может быть точное значение x ?

а) 10,831; б) 10,531; в) 10,529; г) 11; д) 9.

5. Представьте обыкновенную дробь $\frac{7}{19}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.

а) 0,369; б) 0,368; в) 0,370; г) 0,367; д) 0,37.

6. Выберите неверное утверждение.

а) модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением называется абсолютной погрешностью приближения;

б) если число x равно числу a с точностью до h, то пишут $x = a \pm h$;

в) запись $x \approx a$означает, что a является приближённым значением числа x;

г) $520,91 = 5,2091 \cdot 10^2$;

д) $\frac{2}{3} = 0,69 \pm 0,01$.

7. Найдите относительную погрешность округления 9,736 до десятых.

а) 0,037%; б) 3,7%; в) 0,37%; г) 37%; д) 0,0037%.

8. Известно, что x= 0,82 ± 0,2. Найдите относительную погрешность.

а) 24%; б) 2,4%; в) 0,24%; г) 25%; д) другой ответ.

9. Известно, что $x \approx 7{,}31$; $y \approx 0{,}2$. Найдите $1{,}2x + y$.

а) 8,97; б) 9; в) 8,9; г) 8,972; д) 9,0.

10. Известно, что x ≈ 12,25; y ≈ 1,86; z ≈ 21,31. Найдите $\frac{x-y}{3} \cdot z + 9$.

а) 82,80; б) 83; в) 82; г) 82,8; д) другой ответ.

II Вариант

1. Округлите до сотых 0,64859.

а) 0,65; б) 0,6; в) 0,64; г) 0,649; д) 0,6486.

2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{3}{26}$ числом $\frac{1}{9}$.

а) $-\frac{1}{234}$; б) $\frac{53}{234}$; в) $-\frac{53}{234}$; г) $\frac{1}{234}$; д) другой ответ.

3. В каких границах заключено число x , если x = 30,5 ± 0,81?

а) $29{,}69 \le x \le 31{,}31$; б) определить нельзя; в) $30 \le x \le 31$; г) $22{,}4 \le x \le 38{,}6$;
д) $29{,}31 \le x \le 31{,}69$.

4. Пусть x = 10,82 ± 1,31. Каким может быть точное значение x ?

а) 12,131; б) 9,513; в) 9,49; г) 13; д) 9.

5. Представьте обыкновенную дробь $\frac{8}{13}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.

а) 0,616; б) 0,614; в) 0,620; г) 0,615; д) 0,62.

6. Выберите неверное утверждение.

а) относительной погрешностью называется частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины;

б) если $x = a \pm h$, то $a - h \le x \le a + h$;

в) точность измерения приборов устанавливается по наименьшему делению прибора;

г) $224{,}62 = 2{,}2462 \cdot 10^4$;

д) $\dfrac{2}{9} = 0{,}22 \pm 0{,}01$.

7. Найдите относительную погрешность округления 5,314 до сотых.

а) 0,0075%; б) 7,5%; в) 0,075%; г) 75%; д) 0,75%.

8. Известно, что y= 0,73 ± 0,3. Найдите относительную погрешность.

а) 41%; б) 4,1%; в) 0,41%; г) 42%; д) другой ответ.

9. Известно, что $x \approx 6{,}1$; $y \approx 0{,}93$. Найдите $x - 1{,}2y$.

а) 4,984; б) 4,98; в) 4,9; г) 5; д) 5,0.

10. Известно, что x ≈ 5,41; y ≈ 13,22; z ≈ 0,61. Найдите $\dfrac{x+y}{2z} + 8$.

а) 23,3; б) 23; в) 23,30; г) 24; д) другой ответ.

Практическая работа №3

Тема: Сравнение числовых выражений

Цели: Научиться сравнивать числовые выражения

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради

Ход работы

1. Прочитать соответствующий заданию раздел по учебному пособию «Математика» М.И. Башмаков, главы 1, страницы 5 – 12.

2. Выполнить задания по вариантам

Вариант 1

1.Найти НОД и НОК чисел:

а) 154 и 210

б) 255 и 510

2. Найдите остаток отделения на 3 числа:

а) 1 234 321; б) 55 555 155 555

3. Записать в виде десятичной дроби

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{11}$

4. Сравните числовые значения выражений:

$\sqrt{5}$-1 и $\sqrt{2}$;

5. Вычислить:

а) $\sqrt{(|(\sqrt{3}) - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})|}$; б) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + 1$.

в) $\frac{2}{7+4\sqrt{3}} + \frac{2}{7-4\sqrt{3}}$.

6. Вычислить:

$$\frac{4{,}5 : (47{,}375 - \left(26\frac{1}{3} - 18 \cdot 0{,}75\right) \cdot 24 : 0.88)}{17{,}81 : 1{,}37 - 23\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}}$$

Вариант 2

1.Найти НОД и НОК чисел:

а) 120 и 144

б) 105 и 165

2. Найдите остаток отделения на 9 числа:

а) 1 234 567; б) 55 555 155 555

3. Записать в виде десятичной дроби

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{7}{11}$

4. Сравните числовые значения выражений:

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$;

5. Вычислить:

а) $\sqrt{(|(\sqrt{2}) + \sqrt{11})(\sqrt{2} - \sqrt{11})|}$; б) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ - 1.

в) $\frac{3}{5-2\sqrt{6}} + \frac{2}{5+2\sqrt{6}}$.

6. Вычислить: $\frac{\left(19\frac{1}{6} + 43{,}75\right) : \frac{5}{6}}{\left(13{,}3 - 11\frac{1}{2}\right) : 1{,}8} - \frac{\left(26{,}8 - 23\frac{3}{7}\right) : \frac{6}{35}}{0{,}5}$

Практическая работа №4

Тема: Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами.

Цель: Научиться вычислять и сравнивать корни. Выполнять расчеты с радикалами.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради

Теоретический материал

Свойства степеней:

Произведение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $a^p \cdot b^p = (ab)^p$
Деление степеней	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
Возведение степени в степень	$(a^p)^q = a^{pq}$

Свойства корней:

1°. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$.

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$.

4°. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$.

5°. $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leqslant 0$, то $a\neq 0$).

Ход работы:

1. Прочитайте теоретический материал.
2. Выполните задания, подробно расписывая решение, в конце решения укажите ответ

1. Представьте выражение $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b^4}}:\sqrt[3]{b^2\sqrt{b^3}}$ в виде степени.

2. Найдите значение выражения:

1). $((\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{4}}\cdot(\frac{1}{125})^{-\frac{1}{3}})^{-1}$; 2). $\sqrt{16-\sqrt{31}}\cdot\sqrt{\sqrt{31}+16}$

3.Выполните действия:

1). $(\sqrt[3]{25x^2}-\sqrt[3]{16y^2}):(\sqrt[3]{5x}-\sqrt[3]{4y})$; 2). $\dfrac{x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{4}}}:\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$

4. выражение:

1). $\dfrac{\sqrt[6]{y^2}-4}{\sqrt[6]{y}+2}+2$; 2). $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{4}}-1}-\sqrt[4]{a}$; 3). $\dfrac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}-2a^{\frac{1}{6}}$;

4). $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1}-2x^{\frac{1}{8}}$; 5). $\dfrac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}+y}+2\sqrt{y}$;

5. Вычислите:

1). $0{,}3\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}-0{,}1$; 2). $0{,}1\cdot\sqrt{20}:\sqrt{45}-2\dfrac{17}{30}$; 3). $\dfrac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-11}\cdot\sqrt{11}$

4). $64^{-\frac{5}{6}}-(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}-32\cdot 2^{-4}\cdot 16^{-1\frac{1}{2}}+(3^0)^4\cdot 4$

5). $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}+27^{-2\frac{1}{3}}+(6^0)^5\cdot 2-3^{-4}\cdot 81^{-\frac{3}{2}}\cdot 27$

6.Найдите значение выражения $\dfrac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4}+\dfrac{4\cdot y^{0,5}}{y-16}$ при y=18

Практическая работа № 5
Тема: Решение иррациональных уравнений. Нахождение значений степеней с рациональными показателями.
Цель:Отработать навыки решения уравнений. Научиться вычислять степенные выражения содержащие степень с рациональным показателем
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетрадь, учебник

Теоретический материал

Уравнение (неравенство), в котором под знаком корня содержится переменная, называют иррациональным.

Введем два важнейших понятия, полезных при решении иррациональных уравнений и неравенств. Первое из них – область допустимых значений (ОДЗ) – вам уже знакомо. ОДЗ называется множество значений переменной, при которых уравнение или неравенство имеет смысл. В рассматриваемой теме ОДЗ, как правило, определяется возможностью извлечения корня четной степени из выражений.

Решим уравнение $21+\sqrt{2x-7}=x$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x-7}=x-21$ и решим его двумя способами. Учтем, что для уравнения ОДЗ: $x\in\left[\frac{7}{2};\infty\right)$ и ОСР: $x\in[21;\infty)$. Поэтому корни уравнения могут находиться только в промежутке $x\in[21;\infty)$.

1 способ. Возведем обе части уравнения в квадрат: $2x-7=$

Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке, абсцисса которой $x = 28$ и является корнем данного уравнения.

Недостаток этого способа решения – достаточно громоздкие коэффициенты полученного квадратного уравнения $0=x^2-44x+448$.

2 способ. Введем новую переменную $t=\sqrt{2x-7}$ (где $t\geq 0$) и выразим x: $t^2=2x-7$ и $x=\frac{t^2+7}{2}$. Тогда данное уравнение имеет вид:

$=x^2-42x+441$ или $0=x^2-44x+448$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 28$ и $x_2 = 16$. Для данного иррационального уравнения корень $x = 16$ является посторонним, так как не входит в ОСР.

$21+t=\frac{t^2+7}{2}$ или $0=t^2-2t-35$ (заметим, что коэффициенты этого квадратного уравнения небольшие), корни которого $t_1 = 7$ и $t_2 = -5$ (не подходит, так как $t\geq 0$). Вернемся к старой переменной и найдем корень данного уравнения: $x = \dfrac{7^2+7}{2} = 28.$

Из приведенного примера видно, что эффективным приемом является **использование новой переменной (замена переменной)**.

Свойства степеней:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$(a^r)^s = a^{rs}$

$(ab)^r = a^r b^r$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

$a^0 = 1$

Ход работы:

1. Внимательно прочитайте теоретический материал

2. Составьте в тетради алгоритм решения иррациональных уравнений

3. Решите следующие уравнения:

Вариант 1 – 1,3,5,7,9,11,13,15

Вариант 2 – 2,4,6,8,10,12,14,15

1) $\sqrt{x} = 2 - x$; 2) $x - \sqrt{x+1} = 1$; 3) $(x^2-9)\sqrt{2-x} = 0$;

4) $(x^2-4)\sqrt{x+5} = 0$; 5) $x - 1 = \sqrt{x+5}$; 6) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-1}$;

7) $\sqrt{5x-5} + \sqrt{10x-5} = \sqrt{15x-10}$; 8) $\sqrt{6x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$;

9) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3(x-1)}$;

10) $\sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt{x^2+3x-1} = \sqrt{2x^2+6x+2}$;

11) $\sqrt{8-2x+x^2} = \sqrt{x^2+2} + \sqrt{6-2x}$; 12) $2\cdot\sqrt[3]{x} + 5\cdot\sqrt[6]{x} - 18 = 0$;

13) $\sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6$; 14) $x^2 + \sqrt{x^2+20} = 22$;

15) $x^2 + \sqrt{x^2+2x+8} = 12 - 2x$.

4. Вычислите:

а) $-24\cdot 125^{\frac{1}{3}} - 39$.

б) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{36}}$.

в) $\dfrac{\left(0{,}216^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}}{0{,}09^{\frac{3}{4}}\cdot 0{,}027^{\frac{1}{6}}}$.

г) $18\cdot 27^{-\frac{2}{3}}-0{,}4$.

д) $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

е) $9^{-\frac{3}{2}}-(5^0)^3\cdot 3+(0{,}01)^{-0{,}5}-9\cdot 3^{-3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}$.

1) 13; *2) 7;* *3) 3;* *4)* $\dfrac{1}{9}$.

ж) $\dfrac{35}{25^{\frac{1}{2}}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$.

1) $\dfrac{28}{5}$ *2)* 1 *3)* 3,5 *4)* 14

з) $2^3\cdot 2^{-2}+2^{-3}\cdot 2^2+1{,}25$.

и) $2\cdot\left(\dfrac{1}{64^{-\frac{1}{3}}}\right)+0{,}8$.

Практическая работа № 6

Тема: Сравнение степеней. Преобразования выражений, содержащих степени.

Цель:Научиться сравнивать степени. Преобразовывать выражения, содержащие степени.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы

1. Прочитать и выполнить задания (по вариантам) А-низкий уровень сложности, В-средний уровень ложности, С-высокий уровень сложности. Выберите самостоятельно один из предложенных вариантов и решите.

1. Вычислите:

Вариант А

1) $\sqrt{841}$; 2) $\sqrt{0{,}0625}$; 3) $\sqrt{0{,}000324}$; 4) $\sqrt[3]{2{,}16\cdot 10^5}$; 5) $\sqrt[4]{1{,}296\cdot 10^{-5}}$;

6) $\dfrac{(-3)^3\cdot 3^5}{(-3)^9}$; 7) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-2}$; 8) $\dfrac{3^{-1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}\left(5^0-\dfrac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot 10^{-1}$;

9) $\left(\dfrac{256}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 10) $(0{,}064)^{\frac{2}{3}}$; 11) $4^{3{,}5}$; 12) $\left(2{,}7\cdot 10^{-8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

Вариант Б

1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}-\sqrt[3]{216}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[8]{\frac{1}{4}}$;

4) $\sqrt[3]{512}-\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; 5) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{125}}{125}}$; 6) $0{,}27^{-\frac{1}{3}}\cdot 0{,}1^{-\frac{1}{3}}$; 7) $8^{-0,5}:32^{1,5}$;

8) $2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 64^{-\frac{1}{2}}$; 9) $\left(3^{-\frac{3}{4}}\cdot 8\right)^{\frac{4}{3}}$; 10) $4^{-\frac{3}{2}}+4^{0}+4^{\frac{3}{2}}$;

11) $4^{3,5}$; 12) $\left(2{,}7\cdot 10^{-8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

Вариант В

1) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-4}$; 2) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

3) $\sqrt[3]{2\cdot 7^{2}}\cdot\sqrt[3]{4\cdot 7^{4}}$; 4) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$; 5) $\sqrt[6]{54}\sqrt{6}\sqrt[3]{2}$; 6) $\left(0{,}09^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$;

7) $\left(8-37^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(8+37^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; 8) $(54\cdot 250)^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}-128^{\frac{1}{6}}$;

2. Сравните:

Вариант А

1) 91^{2} и 91^{3}; 2) 26^{4} и 5^{8}; 3) $2^{3^{2}}$ и $2^{2^{3}}$; 4) 10^{20} и 20^{10};

5) 9^{5} и $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}$; 6) $(3^{-2})^{-3}$ и $(3^{3})^{2}$; 7) 27^{3} и 3^{6}; 8) $\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$ и $\left(\frac{1}{7}\right)^{11}$;

9) $\left(\frac{11}{13}\right)^{4}$ и $\left(\frac{13}{11}\right)^{4}$; 10) $27^{\frac{2}{3}}$ и $9^{\frac{5}{2}}$;

Вариант Б

1) $9^{\frac{3}{2}}$ и 28; 2) $(\sqrt{125})^{3}$ и $5(\sqrt{5})^{7}$; 3) $45^{2}-31^{2}$ и $44^{2}-30^{2}$;

4) $296^{3}-214^{3}$ и $(296-214)^{3}$; 5) $(117+213)^{3}$ и $117^{3}+213^{3}$;

6) $2\,048^{3}$ и 2^{33}; 7) 28^{16} и 79^{12}; 8) $1\cdot 2^{2}\cdot 3^{3}\cdot\ldots\cdot 10^{10}$ и 10^{55};

9) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ и $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 10) $\left(2\sqrt[4]{2}\right)^{100}$ и $\left(\frac{1}{8}\right)^{-8}$

Вариант В

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\left(\sqrt{8}\right)^{-10}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$ и $\sqrt[13]{5}$; 3) $3\cdot\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{81}$; 4) $\sqrt[12]{623}$ и $\sqrt[3]{5}$;

5) $\frac{1}{2}\sqrt{40}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{99}$; 6) $\sqrt{7}+\sqrt{15}$ и 7; 7) $\left(1{,}2+\sqrt{5}\right)^{100}$ и 3^{100};

8) $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{11}-\sqrt{10}$; 9) $\sqrt[30]{1}+\sqrt[4]{2}$ и 2; 10) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{32}}}$ и $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^{8}}}}$;

Практическая работа № 7
Тема: Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому.
Цель: Научиться вычислять и преобразовывать логарифмические выражения использовав основные свойства логарифма
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал
Свойства логарифмов:
1° $a^{\log_a b} = b$ - <u>основное логарифмическое тождество</u>.
2° $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$
3° $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$
Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.
4° $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ - <u>логарифм произведения</u>.
Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.
5° $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ - <u>логарифм частного</u>.
Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.
6° $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ - <u>логарифм степени</u>.
Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.
7° $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$
8° $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
Ход работы
1. Прочитайте теоретический материал.
2. Выполните задания по вариантам, с подробным решением
<u>Вариант 1</u>
B1. Вычислить $\log_{\frac{1}{2}} 16$.
B2. Вычислить $5^{1+\log_5 3}$.
B3. Вычислить $\log_3 135 - \log_3 20 + 2\log_3 6$.
B4. Вычислить $16^{\log_2 6} - 5^{-\log_5 \frac{1}{17}}$.
B5. Вычислить $\log_{0,25} 0,64 + \log_{0,5} 10$.
B6. Вычислить $\frac{\log_{0.5} 0,125 \cdot \log_7 64}{\log_7 2}$.
B7. Найти значение выражения $\log_7 \frac{49}{b}$, если $\log_7 b = 2,5$.

B8. Найти значение выражения $\log_6^2 27+\dfrac{3\log_6 12^3}{\log_{108}6}$.

B9. Решить уравнение $\log_3 4x-\log_3 6=\log_3 20$.

B10. Найдите корень или сумму корней уравнения, если их несколько $\log_6(2x+12)-\log_6(x-9)=\log_6 x$.

Вариант 2

B1. Вычислить $\log_3\dfrac{1}{27}$.

B2. Вычислить $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}}7}$.

B3. Вычислить $\log_2 56+2\log_2 12-\log_2 63$.

B4. Вычислить $27^{1-\log_3 6}-4^{-\log_4 0,125}$.

B5. Вычислить $\log_6 144-\log_{36}576$.

B6. Вычислить $\dfrac{\log_4 81\cdot\log_{1,5}2,25}{\log_4 3}$.

B7. Найти значение выражения $\log_5(125m)$, если $\log_5 m=-1,5$.

B8. Найти значение выражения $\log_{15}^2 81+\dfrac{16\log_{15}75}{\log_{675}15}$.

B9. Решить уравнение $\log_5(4x)-\log_5 3=\log_5 8$.

B10. Найдите корень или сумму корней уравнения, если их несколько $\log_3^2(x+15)^4=16\log_3(x+15)$.

Практическая работа № 8

Тема: Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений.

Цель: Научиться вычислять, сравнивать, логарифмировать и потенцировать выражения.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетрадь, учебник

Ход работы

1. Прочтите теоретический материал п.р № 13,14
2. Вычислите:

$2^{\log_2 3}$	$3^{\log_3 18}$	$3^{5\log_3 2}$
$4^{\log_2 3}$	$5^{\log_5 16}$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}}2}$
$2^{\log_4 3}$	$10^{\log_{10}2}$	
$27^{\log_3\sqrt[3]{4}}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}6}$	$0,3^{2\log_{0,3}6}$

$7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$
$8^{\log_2 5}$
$9^{\log_3 12}$
$16^{\log_4 7}$
$0{,}125^{\log_{0,5} 1}$
$\lg\frac{1}{1000}$
$\lg 10\sqrt[3]{100}$
$\lg 100\sqrt[5]{10}$
$\lg 0{,}1$
$\lg 1000$
$\lg 10$
$\lg 1$
10^{lg2}
$100^{\lg 4}$
$0{,}1^{\lg 5}$
$10^{2\lg 7}$
$10^{\frac{1}{3}\lg 27}$
$0{,}01^{-\lg 2}$
10^{-lg15}
$0{,}001^{\log_{0,1} 10}$

3.Сравните

а) 3^{400} и 4^{300}; б) $-\log_5\frac{1}{5}$ и $7^{\log_3 1}$;

в) 5^{200} и 2^{500}; г) $\log_4\sqrt{2}$ и $\log_3\frac{1}{81}$.

а) $\log_3 2+\log_3 7$ и $\log_3(2+7)$;
б) $\log_4 5-\log_4 3$ и $\log_4(5-3)$;
в) $3\log_7 2$ и $\log_7(3-2)$;
г) $\log_3 1{,}5+\log_3 2$ и $\log_3 1{,}5^2$.

4. Потенцирование выражений. Найти x по данному его логарифму:

а) $\log_4 x=2\log_4 10+\frac{3}{4}\log_4 81-\frac{2}{3}\log_4 125$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16-\log_{\frac{1}{3}} 8+\log_{\frac{1}{3}} 28$.

в) $\log_5 x=\frac{1}{2}\log_3 144+\log_3 0{,}75$;

г) $\log_\pi x=3\log_{0,1} 4+2\log_{0,1} 1\frac{1}{4}$.

д) $\log_a x=\frac{1}{2}\log_a(m-n)-\frac{1}{3}\log_a(m+n)$

Практическая работа № 9
Тема: Решение логарифмических уравнений
Цель: Научиться решать логарифмические уравнения
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник
Теоретический материал
Ниже приведены основные формулы, которые надо знать, чтобы справиться с логарифмами:
$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$
$\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$
$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$
$\log_{(a^k)} x = \frac{1}{k}\cdot\log_a x$
$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

Кроме того, надо уметь заменять корни и дроби на степени с рациональным показателем, иначе в некоторых выражениях выносить из под знака логарифма будет просто нечего. Формулы замены: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \ \frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Из определения логарифма вытекают две формулы, которые постоянно встречаются в реальных задачах. Эти формулы позволяют заменить знак логарифма нормальными числами:

$\log_a a^n = n$

$b^{\log_b a} = a$

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал
2. Решите один из предложенных вариантов

Вариант1.

Решите уравнение**:**

$\log_2(4-x) = 7$

$\log_5(4+x) = 2$

$\log_5(5-x) = \log_5 3$

$\log_4(x+3) = \log_4(4x-15)$

$\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2$

$\log_3(5-x) = 2\log_3 5$

$\log_7(x^2+5x) = \log_7(x^2+6)$

$\log_4(5+6x) = \log_4(3+4x)+1$

решите уравнение: $\log_{x+6} 32 = 5$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 2

Решите уравнение**:**

$\log_3(4-x) = 4$

$\log_3(9+x) = 4$

$\log_3(14-x) = \log_3 5$

$\log_3(x+4) = \log_3(2x-12)$

$\log_{\frac{1}{7}}(7-3x) = -2$

$\log_3(7-x) = 3\log_3 5$

$\log_8(x^2+x) = \log_8(x^2-4)$

$\log_3(3+2x) = \log_3(1-2x)+1$

решите уравнение: $\log_{x+5} 4 = 2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 3

Решите уравнение**:**

$\log_6(3-x) = 2$

$\log_2(8+x) = 3$

$\log_2(16+x) = \log_2 3$

$\log_{\frac{1}{4}}(9-5x) = -3$

$\log_9(x+6) = \log_9(4x-9)$

$\log_2(9-x) = 2\log_2 3$

$\log_5(x^2+4x) = \log_5(x^2+11)$

$\log_3(7+2x) = \log_3(3-2x)+2$

решите уравнение: $\log_{x-2} 16 = 2$Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 4

Решите уравнение**:**

$\log_2(7-x) = 6$

$\log_2(3+x) = 5$

$\log_5(1+x) = \log_5 4$

$\log_4(x+8) = \log_4(5x-4)$

$\log_{\frac{1}{8}}(13-x) = -2$

$\log_2(11-x) = 4\log_2 5$

$\log_3(x^2+4x) = \log_3(x^2+4)$

$\log_4(5-x) = \log_4(2-x)+1$

решите уравнение $\log_{x+1} 49 = 2$: Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 5

Решите уравнение**:**

Вариант 6

Решите уравнение**:**

$\log_2(4-x)=5$
$\log_2(7+x)=3$
$\log_{11}(16+x)=\log_{11}12$
$\log_5(x+6)=\log_5(4x-3)$
$\log_{\frac{1}{3}}(9-3x)=-2$
$\log_2(18-6x)=4\log_2 3$
$\log_4(x^2-4x)=\log_4(x^2+3)$
$\log_5(8+3x)=\log_5(7-3x)+1$
решите уравнение: $\log_{x-1}25=2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

$\log_4(5-x)=2$
$\log_2(3+x)=7$
$\log_{11}(9+x)=\log_{11}3$
$\log_7(x+9)=\log_7(5x-7)$
$\log_{\frac{1}{9}}(13-x)=-2$
$\log_7(15-x)=2\log_7 4$
$\log_4(x^2+x)=\log_4(x^2+6)$
$\log_2(4+x)=\log_2(2-x)+2$
решите уравнение: $\log_{x+7}25=2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 7
Решите уравнение:

$\log_3(4-x)=2$
$\log_2(7+x)=6$
$\log_7(8+x)=\log_7 10$
$\log_8(x+9)=\log_8(2x-17)$
$\log_{\frac{1}{2}}(13-x)=-4$
$\log_2(4-x)=2\log_2 5$
$\log_5(x^2+5x)=\log_5(x^2+2)$
$\log_2(8+7x)=\log_2(8+3x)+1$
решите уравнение: $\log_{x-3}81=4$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 8
Решите уравнение:

$\log_2(4-x)=8$
$\log_2(3+x)=3$
$\log_{13}(17+x)=\log_{13}3$
$\log_8(x+6)=\log_8(4x-9)$
$\log_{\frac{1}{2}}(8-4x)=-4$
$\log_5(5-5x)=2\log_5 2$
$\log_4(x^2+x)=\log_4(x^2+9)$
$\log_2(2-x)=\log_2(2-3x)+1$
решите уравнение: $\log_{x+5}36=2$Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 9
Решите уравнение:

$\log_3(3-x)=3$
$\log_2(5+x)=2$
$\log_9(9+x)=\log_9 2$
$\log_8(x+6)=\log_8(3x-8)$
$\log_{\frac{1}{3}}(6-5x)=-4$
$\log_5(5-x)=2\log_5 3$
$\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+4)$
$\log_2(8+3x)=\log_2(3+x)+1$
решите уравнение: $\log_{x-3}16=2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

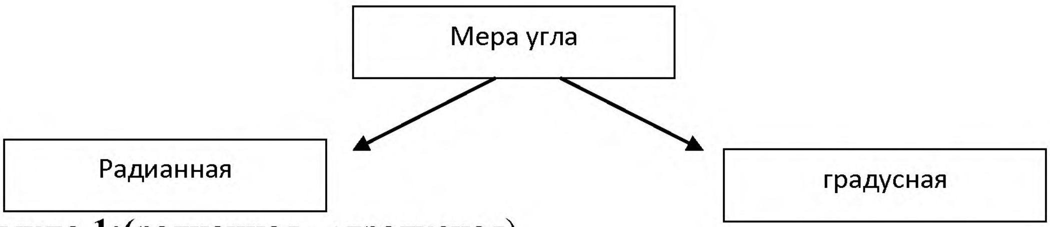
Вариант 10
Решите уравнение:

$\log_2(4-x)=9$
$\log_2(4+x)=7$
$\log_3(13+x)=\log_3 2$
$\log_7(x+5)=\log_7(4x-7)$
$\log_{\frac{1}{2}}(12-4x)=-4$
$\log_4(8-5x)=2\log_4 3$
$\log_8(x^2-5x)=\log_8(x^2+4)$
$\log_4(4+7x)=\log_4(1+5x)+1$
решите уравнение $\log_{x-7}25=2$: Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Практическая работа № 11.

Тема: Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.
Цель: Научится переводить из градусной меры в радианную и наоборот
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал
Определение: Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называется углом в 1 радиан (рад).



Формула 1:(радианная →градусная)

$$\alpha^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot\alpha_{рад}$$

Формула 2:(градусная → радианная)

$$\alpha_{рад}=\frac{180}{\pi}\cdot\alpha^{\circ}$$

Формула 3:
$l=\alpha\cdot R$ где l- длина дуги,
R – радиус окружности, которую стягивает дуга
Формула 4:
$S=\frac{R^2}{2}\cdot\alpha$, где, l- длина дуги
R – радиус окружности, которую стягивает дуга
S – площадь кругового сектора
$\alpha=\alpha_{рад}$ радианная мера угла

Ход работы
***Задание*1:** Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

а) $5^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot 5=\frac{5\pi}{180}=\frac{\pi}{36}\,рад$ б) $54^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot 54=\frac{\ldots\pi}{180}=\ldots..рад$

в) $18^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot 18=\frac{18\pi}{180}=\ldots..рад$ г) $135^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot\ldots=\ldots..рад$

***Задание*2:** Найти градусную меру угла, выраженного в радианах :

а) $\frac{\pi}{18}\,рад=(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{18})^{\circ}=(\frac{180}{18})^{\circ}=10^{\circ}$ б) $\frac{5\pi}{6}\,рад=(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6})^{\circ}=(\frac{\ldots}{6})^{\circ}=\ldots.^{\circ}$

в) $\frac{\pi}{20}\,рад=(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{20})^{\circ}=(\frac{180}{20})^{\circ}=\ldots..^{\circ}$ г) $\frac{\pi}{3}\,рад=(\frac{180}{\pi}\cdot\ldots.)^{\circ}=\ldots..^{\circ}$

***Задание*3:** Заполнить таблицу:

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°	360°
радианы	0									

***Задание*4:** Решить задачи:

1)Вычислить радиус окружности, если её дуга, длиной l=7,2см стягивает центральный угол α=3,6рад.

2) Дуга окружности радиуса R=3см стягивает угол $\alpha_{рад}$=4,5рад. Найти длину этой дуги l и площадь сектора , ограниченного ею S.

3) Окружность морских компасов делится на 32 равные дуги, называемые румбами. Вычислите градусную и радианную меры румба

***Задание*5:** Заполнить таблицу:

Угол (в рад.)	60°	45°		
Угол (в град.)		$\frac{\pi}{4}$		4
Радиус (в см.)		$\frac{4}{\pi}$	6	
Длина дуги (в см.)		1	3	
Площадь сектора (в см^2)		$\frac{2}{\pi}$		50

Практическая работа № 12
Тема: Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение
Цель: Научится вычислять, преобразовывать тригонометрические выражения используя основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Теоретический материал
Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z,$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Тригонометрические формулы сложения

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}, \quad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha},$$

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Формулы сложения.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

Формулы двойных и половинных углов.

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

$\sin 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$.

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

$\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Формулы преобразования суммы в произведение:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$1 - \cos\alpha = 2 \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$1+\cos2\alpha=2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

Формулы преобразования произведения в сумму

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$.

Пример: Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=$\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	IIч.	+	-	-	-

Формула 1б)

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=(\cos\alpha\, имеет знак -)=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

Формула 2) Формула 3)

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$ ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

*Ответ:*cosα=$\frac{4}{5}$,tgα=-$\frac{3}{4}$,ctgα=$-\frac{4}{3}$

Ход работы

1. Прочитайте и запомните основные тригонометрические формулы
2. Изучите алгоритм решения, рассмотрев пример
3. Выполните заданияпо вариантам

Вариант 1

Задание 1: Перепишите пример и закончите решение

Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=-$\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$	IVч.	-	+	-	-

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=(\cos\alpha\, имеет знак +)=+\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-.....$ ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{....}{...}=-.....$

*Ответ:*cosα=$\frac{3}{5}$,tgα=-…,ctgα=-….

2. tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{....}{......}=-.....$

3. Найти остальные тригонометрические функции, если:

cosα=-$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

4.Дано $\cos x=\frac{3}{5},\ \ x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right).$

Найти $\cos 2x,$

5. Упростите выражения;

а) $\sin 20^0\cos 40^0+\cos 20^0\sin 40^0$;

б) $\sin 45^0\cos 15^0-\cos 45^0\sin 15^0$;

6. Вычислите:

$а).\ \sin\frac{7\pi}{3},\qquad б).\ \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right),$

$в).\ tg\left(-\frac{13\pi}{6}\right),\qquad г).\ ctg13{,}5\pi$

$д).\ 2\sin 870^0+\sqrt{12}\cos 570^0-tg^2 60^0.$

7. Упростите:

$ctgt\cdot\sin(-t)+\cos(2\pi-t)$

8. Известно, что: $\sin t=\frac{4}{5},\frac{\pi}{2}<t<\pi$.

Вычислить $\cos t,\ tgt,\ ctgt$.

9. Докажите тождество: $\frac{ctgt}{tgt+ctgt}=\cos^2 t$.

10. Вычислите:

$а).\ \sin 58^0\cos 13^0-\cos 58^0\sin 13^0;$

$б).\ \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

Вариант 2

Задание 1.Перепишите пример и закончите решение

Вычислить sinα,tgα,ctgα, если cosα=-0,6, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	IIIч.	-	-	+	+

Формула 1а)

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=(\sin\alpha\, имеет знак -)=-\sqrt{1-(-0{,}6)^2}=-\sqrt{1-0{,}36}=-\sqrt{0{,}64}=-....$2.

ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{....}{...}=-.....$

3. Найти остальные тригонометрические функции, если:

sinα=0,6 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

4. Дано. $cosx=\frac{3}{5},\ x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right).$

Найти: $sin2x.$

5. Упростите выражения;

а) $\cos 12^0 \cos 18^0 - \sin 12^0 \sin 18^0$;

б) $\cos 98^0 \cos 8^0 + \sin 98^0 \sin 8^0$;

6. Вычислите:

$а).\ \sin\frac{9\pi}{4},\qquad б).\ \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right),$

$в).\ tg\left(-\frac{7\pi}{6}\right),\qquad г).\ ctg\frac{5\pi}{4}$

$д).\ 4\sin^2 120^0 - 2\cos 600^0 + \sqrt{27}tg660^0.$

7. Упростите:

$tgt\cdot\cos(-t)+\sin(\pi+t)$

8. Известно, что:

$\sin t=\frac{3}{5},\frac{\pi}{2}<t<\pi.$

Вычислить $\cos t,\ tgt,\ ctgt$.

9). Докажите тождество:

$\frac{tgt}{tgt+ctgt}=\sin^2 t.$

10. Вычислите

$а).\ \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10};$

$б).\ \cos 78^0\cos 108^0+\sin 78^0\sin 108^0$

Практическая работа №13

Тема: Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Цель**:** сформировать умение применять формулы к решению задач по изучаемой теме.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Ход работы:

Рассмотрите теоретический материал по теме. Сделать краткие записи в тетради

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Формулы преобразования суммы и разности в произведение	Формулы половинного аргумента

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5) $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

6) $ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента

1) $\sin\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 3) $tg\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

2) $\cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 4) $ctg\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

3) $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

4) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5) $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

6) $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Формулы преобразования произведения в сумму (разность)

1) $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$

3) $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

4) $tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$

5) $ctg\alpha\cdot ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Преобразуйте в произведение:

А) $Cos50^0 + Cos20^0$;

Б) $Sin2\alpha - Sin10\alpha$.

2. Упростите:

А) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}$;

Б) $\frac{\cos\alpha-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha}$.

3. Найти *sinα* и *cosα*, если известно, что $tg\frac{\alpha}{2}=5$.

4. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{1}{3}, 2\pi<\alpha<3\pi$

Вариант 2

1. Преобразуйте в произведение:

А) $Sin12^0 + Sin20^0$;

Б) $Cos6\alpha - Cos3\alpha$.

2. Упростите:

А) $\frac{\cos2\alpha-\cos4\alpha}{\cos2\alpha+\cos4\alpha}$;

Б) $\frac{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}$.

3. Найти *sinα* и *cosα*, если известно, что $tg\frac{\alpha}{2}=2$.

4. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{3}$

Практическая работа №15

Тема: Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

Цель**:** сформировать умение применять формулы к решению задач по изучаемой теме.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Порядок выполнения работы:

Рассмотрите теоретический материал по теме. Сделать краткие записи в тетради

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Поскольку тригонометрические функции периодичны, то обратные к ним функции не однозначны. Так, уравнение $y = \sin x$, при заданном y (-1≤ y ≤ 1), имеет бесконечно много корней. Действительно, в силу периодичности синуса, если x такой корень, то и $x + 2\pi n$ (где n целое) тоже будет корнем уравнения. Таким образом, обратные тригонометрические функции многозначны. Чтобы с ними было проще работать, вводят понятие их главных значений. Например, если для синуса $y=\sin x$, если ограничить аргумент x интервалом, то на этом интервале функция $y= \sin x$ монотонно возрастает. – –

Поэтому она имеет однозначную обратную функцию, которую называют *арксинусом:* $x = \arcsin y$.

Если особо не оговорено, то под обратными тригонометрическими функциями имеют в виду их главные значения, которые определяются следующими определениями.

Арксинус ($y = \arcsin x$) – это функция, обратная к синусу ($x = \sin y$), имеющая область определения и множество значений .

Арккосинус ($y = \arccos x$) – это функция, обратная к косинусу ($x= \cos y$), имеющая область определения и множество значений .

Арктангенс ($y = \mathrm{arctg}\, x$) – это функция, обратная к тангенсу ($x = \mathrm{tg}\, y$), имеющая область определения и множество значений .

Арккотангенс ($y = \mathrm{arcctg}\, x$) – это функция, обратная к котангенсу ($x= \mathrm{ctg}\, y$), имеющая область определения $-\infty < x < +\infty$ и множество значений $0 < y < \pi$.

Графики обратных тригонометрических функций получаются из графиков тригонометрических функций зеркальным отражением относительно прямой y = x.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	Вариант 2
Вычислите:	
1. $\arcsin 0 - \arccos 0$; 2. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3. $\frac{2}{\pi}\arcsin(-1) - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4. $\arccos 1 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5. $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 6. $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7. $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 8. $tg\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.	1. $\arcsin 1 - \arccos(-1)$; 2. $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3. $\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\arccos 1$; 4. $\arccos(-1) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 5. $\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 6. $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 7. $\arccos\left(tg\frac{\pi}{4}\right)$; 8. $\sin(\arccos 0)$.
Вычислите:	

$arctg\sqrt{3} - arctg1 + arccrg\left(-\sqrt{3}\right)$; $tg\left(arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $arcctg\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$	$arcctg\left(-1\right) + arctg\frac{\sqrt{3}}{3} - arccrg0$; $ctg\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $arctg\left(\cos\pi\right)$

Практическая работа № 16
Тема: Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств
Цель: Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Теоретический материал

<u>Опр.</u>

Уравнение называется тригонометрическим, если неизвестная величина входит в него как аргумент тригонометрической функции.

Решение тригонометрических уравнений

Уравне-ние	a	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert > 1$	Нет решений	—
	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \times$ $\times \arcsin a + \pi k$, $k \in z$	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in z$
			$\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} +$ $+ 2\pi k$, $k \in z$
			$\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2}$ $+ + 2\pi k$, $k \in z$
$\cos x = a$	$\lvert a\rvert > 1$	Нет решений	—
	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a +$ $+ 2\pi n$, $n \in z$	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$
			$\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in z$
			$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$
$\mathrm{tg}\, x = a$	a — любое число	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k$, $k \in z$	—
$\mathrm{ctg}\, x = a$	a — любое число	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$, $n \in z$	—

Уравнения вида $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx =$а называются простейшими. Для них выведены формулы корней:

$sinx = a$ $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

$\cos x = a$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

$tg\ x = a$ $x = arctg\ a + \pi n, n \in Z$

$ctg\ x = a$ $x = arctg\ \frac{1}{a} + \pi n, n \in Z$

Определение. Неравенства, содержащие переменную под знаком тригонометрической функции, называются тригонометрическими.
При решении тригонометрических неравенств используют единичную окружность.
Множество решений неравенства:

$\sin x \geq a$

$\arcsin a + 2\pi k \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k$

$\sin x \leq a$

$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \leq x \leq \arcsin a + 2\pi k$

$\cos x \geq a$

$2\pi k - \arccos a \leq x \leq 2\pi k + \arccos a$

$\cos x \leq a$

$2\pi k + \arccos a \leq x \leq 2\pi k$

$tgx \geq a$

$arctg\ a + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$tgx \leq a$

$-\frac{\pi}{2} + \pi k \leq x \leq arctg\ a + \pi k$

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал

2. Решить тригонометрическое уравнение по аналогии

$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

Решение:

$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ (разделим на то, что стоит перед знаком «=», т.е. на cosx)

$$\frac{3\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x} = 0$$

$3tgx + \sqrt{3} = 0$

$3tgx = -\sqrt{3}$

$tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \pi n, n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$

2) $\sin x - \cos x = 0$

3) $4\sin x + 12\cos x = 7$;

4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$;

5) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$

3. Решите уравнения, с подробным решением
Вариант 1, решает задание под четными числами, Вариант 2 - нечетными

1) $\sin 3x = 0$; 2) $\cos 4x = 1$; 3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$; 4) $2\sin\frac{x}{3} = 1$;

5) $\cos 5x + 1 = 0$; 6) $3\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{2x}{3} = 0$; 8) $1 - \sin\frac{x}{3} = 0$;

9) $\sqrt{3} - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 10) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{3}$; 11) $\sin^2 x = 1$;

12) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 13) $\cos\frac{x}{2} = 0$; 14) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 15) $\sin 4x = -1$;

16) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$; 17) $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 18) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Решите неравенства

Вариант 1.	**Вариант 2.**
Решить неравенства:	**Решить неравенства:**
1) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;	1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sin x \leq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x > -\sqrt{3}$	3) $\sin x \geq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\sqrt{3}$
5) $\sin 3x > -\frac{1}{2}$	5) $\sin 3x < -\frac{1}{2}$

Практическая работа № 18
Тема: Определение функций. Построение и чтение графиков функций. Исследование функции.
Цель: Научиться исследовать функцию
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал
Опр.
Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать её аргумент (переменная x)
Опр.
Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, т.е выполнимы все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.
Опр.
Множеством значений функции называется множество всех значений, которые принимает функция (переменная y)
*Пример*Найти область определения функции $y = \sqrt{x+1}$
Решение: обл. опр. $x + 1 \geq 0$
$x \geq -1$
Ответ: $D(y)$: $x \geq -1$

Опр.
Функция $y = f(x)$ называется чётной, если для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$

Опр.
Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

Пример. Определить, является ли функция чётной или нечётной $f(x) = x \cdot \sin x$

Решение $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x) \Rightarrow f(x) -$ чётная

Опр.
Функция *y = f(x)* называется периодической, если существует такое число T ≠ 0, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство *f(x-T) = f (x) = f (x + T)*. Число T называется периодом функции *f(x)*.

Пример Доказать, что функция $f(x) = \sin 3x$ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{3}$

Доказательство: $f(x+T) = f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x) \Rightarrow$

функция периодическая

Ход работы:

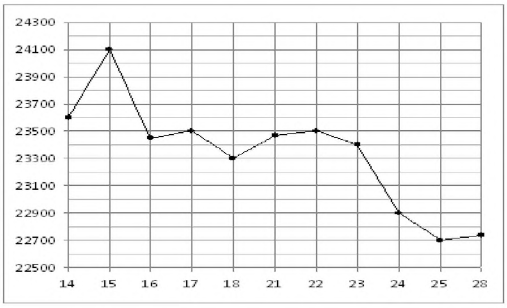
1. Прочитать теоретический материал
2. Выполнить задания по вариантам

1 вариант.

1. Найти область определения функции: а) $y = \frac{1}{x+2}$ б) $y = \sqrt[4]{x^2 - 7x + 10}$
2. Доказать, что функция периодическая с периодом T: $y = \sin 2x$, $T = \pi$
3. Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной: $y = x \cdot \sin x$
4. Построить график функции, заданной : а) формулой $y = \begin{cases} x^2 + 4, \text{ если } x \le 1 \\ 5, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

б) описанием: *Д* (f) = [1; 7] , f(7) = 1, $f(x) = x^2$ при $1 \le x \le 2$, y = f(x) убывает на промежутке $2 < x \le 7$

5. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.

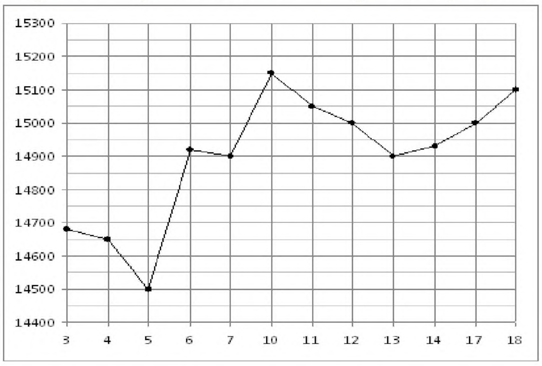


2 вариант.

1. Найти область определения функции: а) $y = \dfrac{1}{x-3}$ б) $y = \sqrt[4]{x^2 + 4x - 5}$
2. Доказать, что функция периодическая с периодом Т: $y = \cos\dfrac{x}{2}$, Т = 4π
3. Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной: y = x + sinx
4. Построить график функции, заданной : а) формулой $y = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ если } x \le 1 \\ -3, \text{ если } x > 1 \end{cases}$

б) описанием: *Д* (f) = [-3; 3] , Е(f) :f(x) < 0 , функция чётная, возрастает при x < 0, убывает при x ≥ 0

5. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Практическая работа №20

Тема: Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Цель: изучить свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

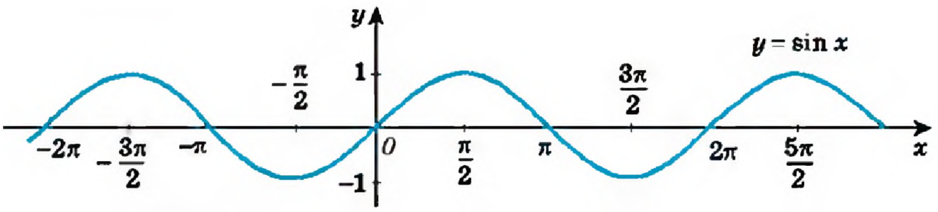
Количество часов: 2

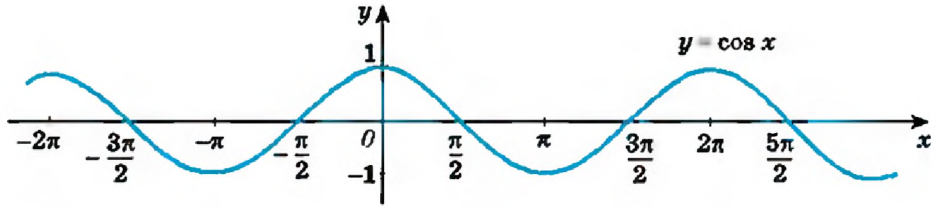
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

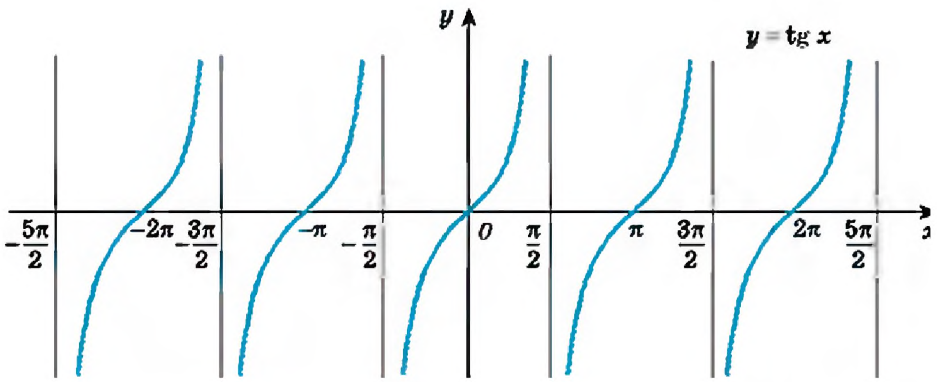
	Функция			
	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x$
1.1	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$(\pi n; \pi + \pi n)$
1.2	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
2.1	Нечетная	Четная	Нечетная	Нечетная
2.2	2π	2π	π	π
3.1	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$
3.2	$(0; 0)$	$(0; 1)$	$(0; 0)$	Нет
4.1	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
4.2	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
5.1	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	Нет
5.2	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	Нет	$(\pi n; \pi + \pi n)$
6.1	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$	Нет	Нет
6.2	-1	-1	Нет	Нет
6.3	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$2\pi n$	Нет	Нет
6.4	1	1	Нет	Нет

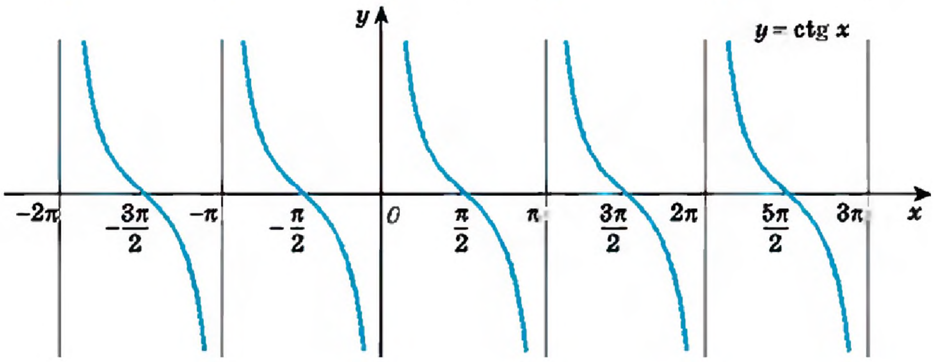
1.1 — область определения;
1.2 — область значений;
2.1 — четность (нечетность);
2.2 — наименьший положительный период;
3.1 — координаты точек пересечения графика f с осью Ox;
3.2 — координаты точек пересечения графика f с осью Oy;

4.1 — промежутки, на которых f принимает положительные значения;
4.2 — промежутки, на которых f принимает отрицательные значения;
5.1 — промежутки возрастания;
5.2 — промежутки убывания;
6.1 — точки минимума;
6.2 — минимумы функции;
6.3 — точки максимума;
6.4 — максимумы функции.









.

Функция	**Преобразование графика функции *y = f(x)***
y=f(kx),0<k<1	График функции *y=f(x)* растягивается от оси *OY* в $\frac{1}{k}$ раз
y=f(kx),k>1	График функции *y=f(x)* сжимается в *k* раз к оси *OУ*.
y=k f(x),0<|k|<1	График функции *y=f(x)* сжимается к оси *OX* в *k* раз
y=k f(x),|k|>1	График функции *y=f(x)* растягивается от оси *OX* в *k* раз.

Ход работы

Изучить теоретический материал

2. Выполнить задания

Задания для самостоятельного решения

Задание. Постройте графики следующих функций.

Вариант 1

1. $y = \frac{1}{2}\cos(x + \frac{\pi}{3})$;

Вариант 2

1. $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

2. $y = 3\log_{\frac{1}{4}}(5x-2)+7$

3. $y = |3\sin 2x| - 1$

2. $y = \frac{1}{4}\log_2(3x+2) - 4$

3. $y = \left|\frac{1}{2}\sin 3x\right| + 2$

Практическая работа №21

Тема: Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции.

Цель: Познакомиться с обратными тригонометрическими функциями, их свойствами и графиками

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

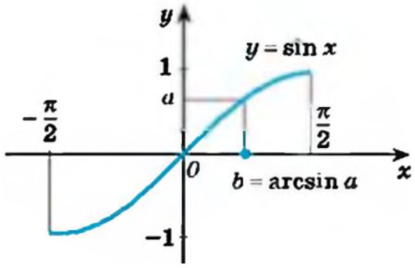
Теоретический материал

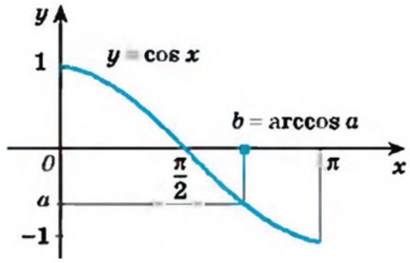
Арксинус числа *a* ($\arcsin a$) – такой угол α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, то есть $\alpha = \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin\alpha = a$.

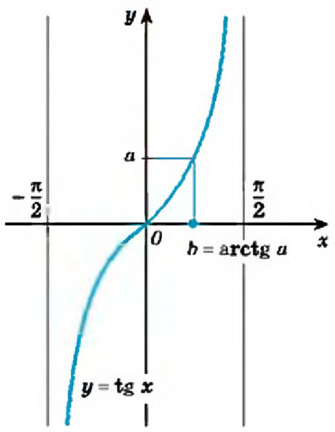
Арккосинус числа *a* ($\arccos a$) – такой угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a, то есть $\alpha = \arccos a \in [0; \pi]$; $\cos\alpha = a$.

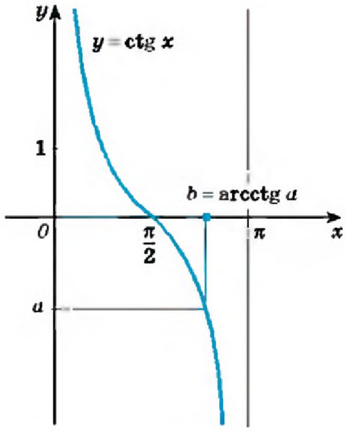
Арктангенс числа *a* ($\mathrm{arctg}\, a$) – такой угол α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, то есть $\alpha = \mathrm{arctg}\, a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\mathrm{tg}\,\alpha = a$.

Арккотангенс числа *a* ($\mathrm{arcctg}\, a$) – такой угол α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a, то есть $\alpha = \mathrm{arcctg}\, a \in (0; \pi)$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = a$.







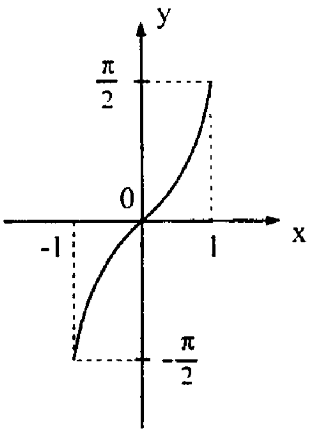


Ход работы

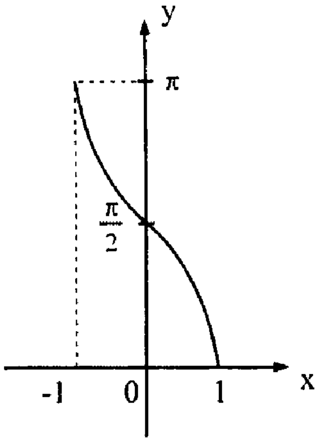
1. Выучите определения обратных тригонометрических функций
2. Посмотрите графики обратных тригонометрических функций
3.Запишите в тетрадь таблицу основных свойств обратных тригонометрических функций

Свойства функции	Функции			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$
Область определения	$x \in [-1; 1]$	$x \in [-1; 1]$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
Область значений	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [0; \pi]$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$y \in (0; \pi)$
Четность	Нечетная	Ни четная, ни нечетная	Нечетная	Ни четная, ни нечетная
Нули функции ($y = 0$)	При $x = 0$	При $x = 1$	При $x = 0$	$y \neq 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x \in (0; 1]$ $y < 0$ при $x \in [-1; 0)$	$y > 0$ при $x \in [-1; 1)$	$y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	$y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает

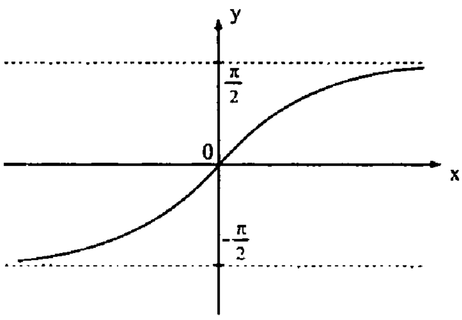
Связь с тригонометрической функцией	$\sin y = x$	$\cos y = x$	$\operatorname{tg} y = x$	$\operatorname{ctg} y = x$
График	а	б	в	г



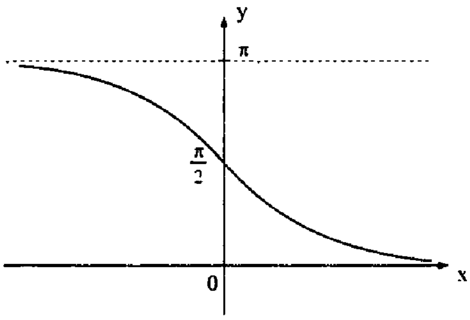
а) $y = \arcsin x$



б) $y = \arccos x$



в) $y = \operatorname{arctg} x$



г) $y = \operatorname{arcctg} x$

4. Посмотрите пример нахождения области определения, запишите в тетрадь

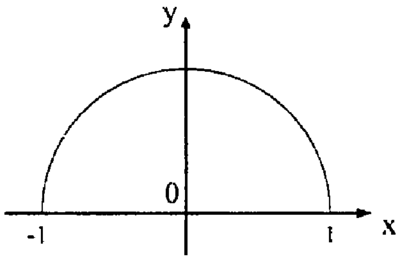
Найти область определения функции $y = \arcsin(2x + x^2)$.

Для того чтобы функция y была определена, необходимо выполнение неравенства $-1 \le 2x + x^2 \le 1$, которое эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} -1 \le 2x + x^2 \\ 2x + x^2 \le 1 \end{cases}$. Решением первого неравенства является промежуток $x \in (-\infty; +\infty)$, второго – $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$. Этот промежуток $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$ и является решением системы неравенств, а следовательно, и областью определения функции $D(y) = [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$.

Разберите пример построения графика функции, запишите в тетрадь

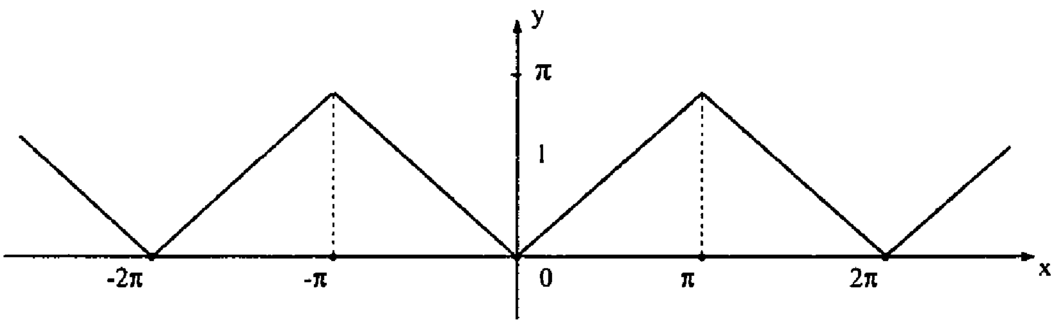
Построить график функции $y = \cos(\arcsin x)$.

Пусть $\alpha = \arcsin x$. Тогда $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $y = \cos\alpha \geq 0$. Учтем, что $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, то есть $x^2 + y^2 = 1$ и ограничения на x ($x \in [-1; 1]$) и y ($y \geq 0$). Тогда графиком функции $y = \cos(\arcsin x)$ является полуокружность.



Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Так как функция $\cos x$ изменяется на отрезке $[-1; 1]$, то функция y определена на всей числовой оси и изменяется на отрезке $[0; \pi]$. Учтем, что $y = \arccos(\cos x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$; функция y является четной и периодической с периодом 2π, учитывая, что этими свойствами обладает функция $\cos x$. Теперь легко построить график.



6. Выполните задания:буква задания соответствует первой, второй букве вашей фамилии. Например Иванов Иван, первач буква и, значит выполняем задание по буквой «и»

1. Найти область определения функции:

а) $y = \cos(\arcsin 3x)$; б) $y = \sin(\arccos 2x)$;

в) $y = \arccos(\sin 5x)$; г) $y = \arcsin(\cos 4x)$;

д) $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$; е) $y = \arccos(\operatorname{ctg} x)$;

ж) $y = \arcsin(2|x| - 3)$; з) $y = \arccos(3|x| - 2)$;

и) $y = \arcsin\dfrac{2x-1}{x+1}$; к) $y = \arccos\dfrac{x-3}{2x-1}$;

л) $y = \arcsin(x^2 - x - 1)$; м) $y = \arccos(x^2 + x + 1)$.

2. Найти область значений функции:

а) $y = \arcsin(3x - 2)$; б) $y = \arccos(3 - 2x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(1 - 2|x|)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(4|x| - 1)$;

д) $y = \operatorname{arctg}(\cos x)$; е) $y = \operatorname{arcctg}(\sin x)$;

ж) $y = \arcsin\sqrt{x}$; з) $y = \arccos\dfrac{1}{x^2 + 1}$;

и) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 1}$; к) $y = \arcsin\dfrac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 2}$.

3. Постройте графики функций:

а) $y = \arcsin(x - 3)$; б) $y = \arccos(x + 2)$; в) $y = \sin(\arcsin x)$;

г) $y = \cos(\arccos x)$; д) $y = \sin(\arccos x)$; е) $y = -\cos(\arcsin x)$;

ж) $y = \arcsin(\sin x)$; з) $y = \arccos(\cos x)$; и) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

к) $y = \sin(2\operatorname{arctg} x)$; л) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1 - x))$;

м) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 + 1}{2x}$; н) $y = \arccos\dfrac{1}{x^2}$.

Практическая работа № 22

Тема: Преобразования графика функции. Гармонические колебания. Прикладные задачи.

Цель: Посмотреть примеры преобразования графиков тригонометрических функций, научиться решать примеры преобразования графика функций

Количество часов: 2

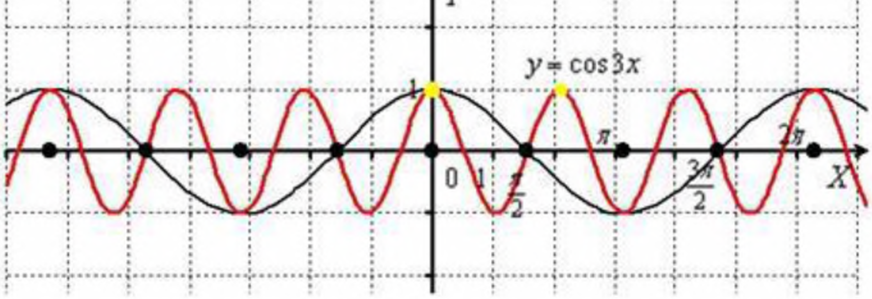
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник, линейка, карандаш

Теоретический материал:

Пример 1

Построить график функции $y = \cos 3x$

сжимается **к оси** OY в 3 раза:



Итоговый график $y = \cos 3x$ проведён красным цветом.

Исходный период $T = 2\pi$ косинуса закономерно уменьшается в три раза:
$T = \dfrac{2\pi}{3}$ (отграничен жёлтыми точками).

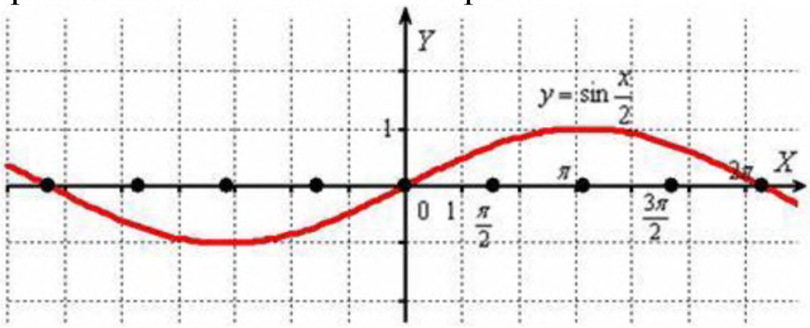
Растяжение графика функции от оси ординат

Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $0 < k < 1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть от оси** OY в $\dfrac{1}{k}$ раз.

Пример 3

Построить график функции $y = \sin\dfrac{x}{2}$

растягиваем **от оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin\dfrac{x}{2}$ получается путём **растяжения** графика $y = \sin x$ **от оси ординат** в два раза.

Пример 4

Построить график функции $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

График синуса $y = \sin x$ сдвинем вдоль оси вдоль оси OX на $\dfrac{\pi}{2}$ **влево**:

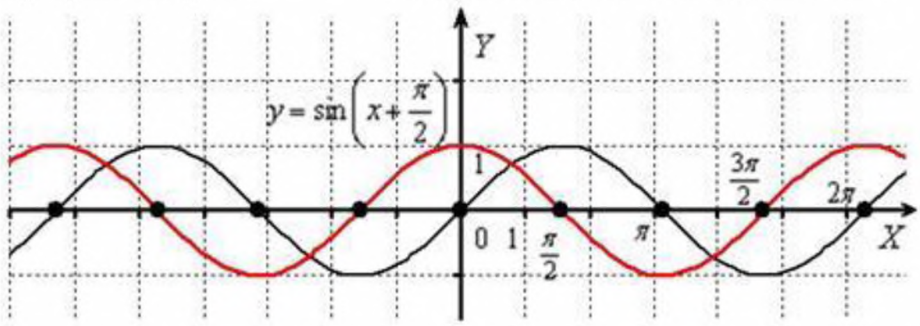


График функции $y = \cos x$ получается путём сдвига синусоиды $y = \sin x$ вдоль оси OX на $\dfrac{\pi}{2}$ единиц

Аргумент функции необходимо представить в виде $f(kx+b) = f\left(k\left(x+\dfrac{b}{k}\right)\right)$ и последовательно выполнить следующие преобразования:

1) График функции $f(x)$ сжимаем (или растягиваем) к оси (от оси) ординат: $f(kx)$ (если $k<0$, то график дополнительно следует отобразить симметрично относительно оси OY).

2) График полученной функции $f(kx)$ сдвигаем влево (или вправо) вдоль оси абсцисс **на** $\frac{b}{k}$ **(!!!) единиц**, в результате чего будет построен искомый график $f(kx+b)$.

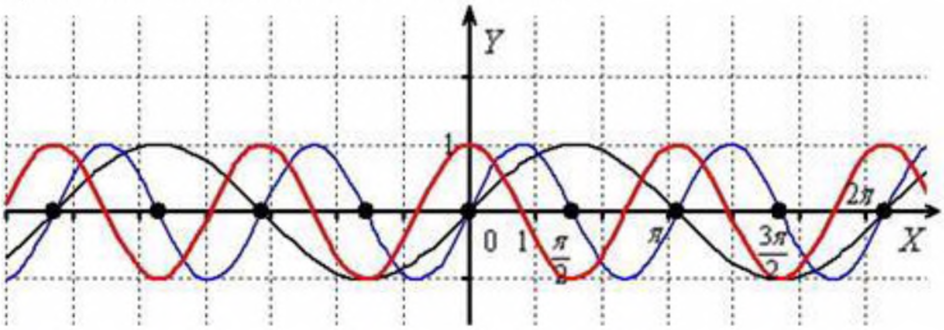
Пример 5

Построить график функции $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

Представим функцию в виде $y=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ и выполним следующие преобразования: синусоиду $y=\sin x$

1) сожмём **к оси** OY в два раза: $y=\sin 2x$

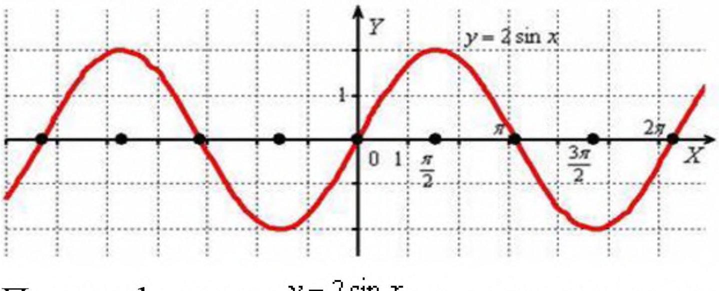
2) сдвинем вдоль оси OX **на** $\frac{\pi}{4}$ **влево**: $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$



Пример 6

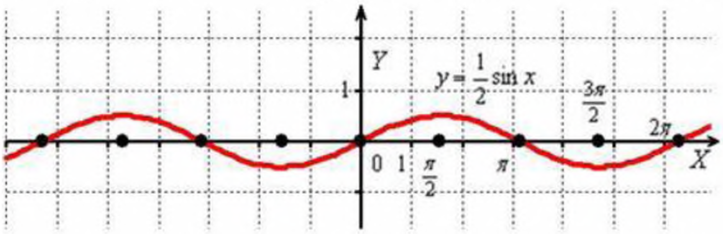
Построить графики функций $y=2\sin x,\quad y=\frac{1}{2}\sin x$.

И **вытягиваем** её **вдоль оси** OY в 2 раза:



Период функции $y=2\sin x$ не изменился и составляет $T=2\pi$, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается: $E(y)=[-2;2]$.

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси** OY в 2 раза:

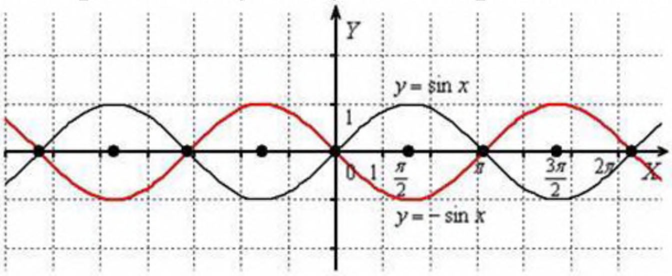


Аналогично, период $T = 2\pi$ не изменился, но область значений функции изменилась в два раза: $E(y) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Пример 7

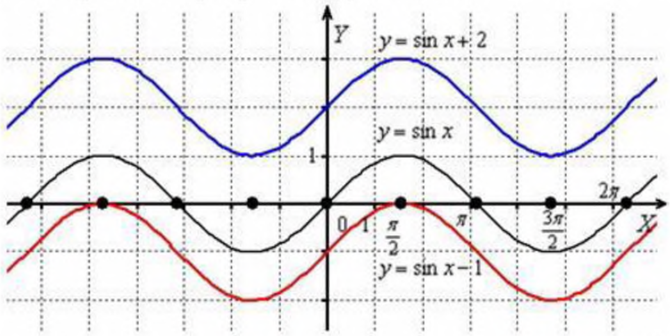
Построить график функции $y = -\sin x$

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси OX :



Пример 15

Построить графики функций $y = \sin x + 2, \quad y = \sin x - 1$.



Комбинационное построение графика $mf(x) + h$ в общем случае осуществляется очевидным образом:

1) График функции $f(x)$ растягиваем (сжимаем) вдоль оси OY. Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси OX.

2) Полученный на первом шаге график $mf(x)$ сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы h.

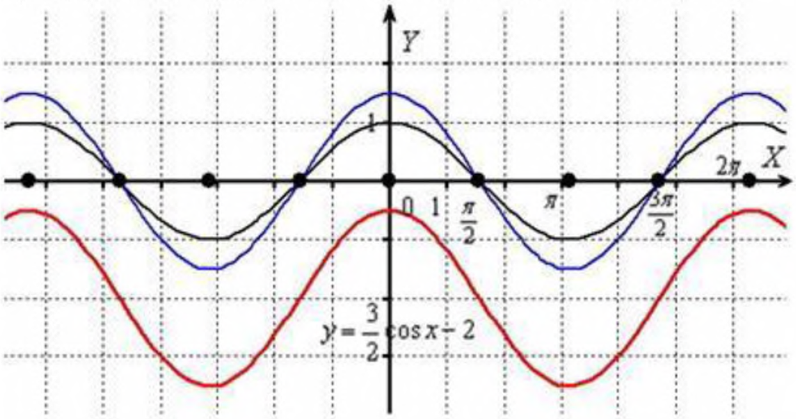
Пример 16

Построить график функции $y = \frac{3}{2}\cos x - 2$

График косинуса $y = \cos x$ (чёрный цвет):

1) Растягиваем вдоль оси OY в 1,5 раза: $y=\frac{3}{2}\cos x$ (синий цвет);

2) Сдвигаем вдоль оси OY на 2 единицы вниз: $y=\frac{3}{2}\cos x-2$:



2. Гармонические колебания. Величины, меняющиеся согласно закону

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

или

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

играют важную роль в физике. По такому закону меняется координата шарика, подвешенного на пружине (рис. 149). Говорят, что шарик совершает *гармонические колебания.*

Функцию (2) тоже можно записать в виде (1):

$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Параметры A, ω и φ, полностью определяющие колебание (1), имеют специальные названия: A называют *амплитудой колебания*, ω — *циклической* (или круговой) *частотой колебания*, φ — *начальной фазой колебания* (обычно берут $\varphi \in [0; 2\pi)$). Период функций $A\sin(\omega t + \varphi)$ и $A\cos(\omega t + \varphi)$, равный $\frac{2\pi}{\omega}$, называют *периодом гармонического колебания.*

Ход работы

1. Прочитать теоретическийматериал
2. Аналогично построенным графикам функций, построить графики следующий функций: Вариант 1- а, е, з, к. Вариант 2 - б, г, в, д, Вариант 3- ж, и, л, м

а) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

в) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

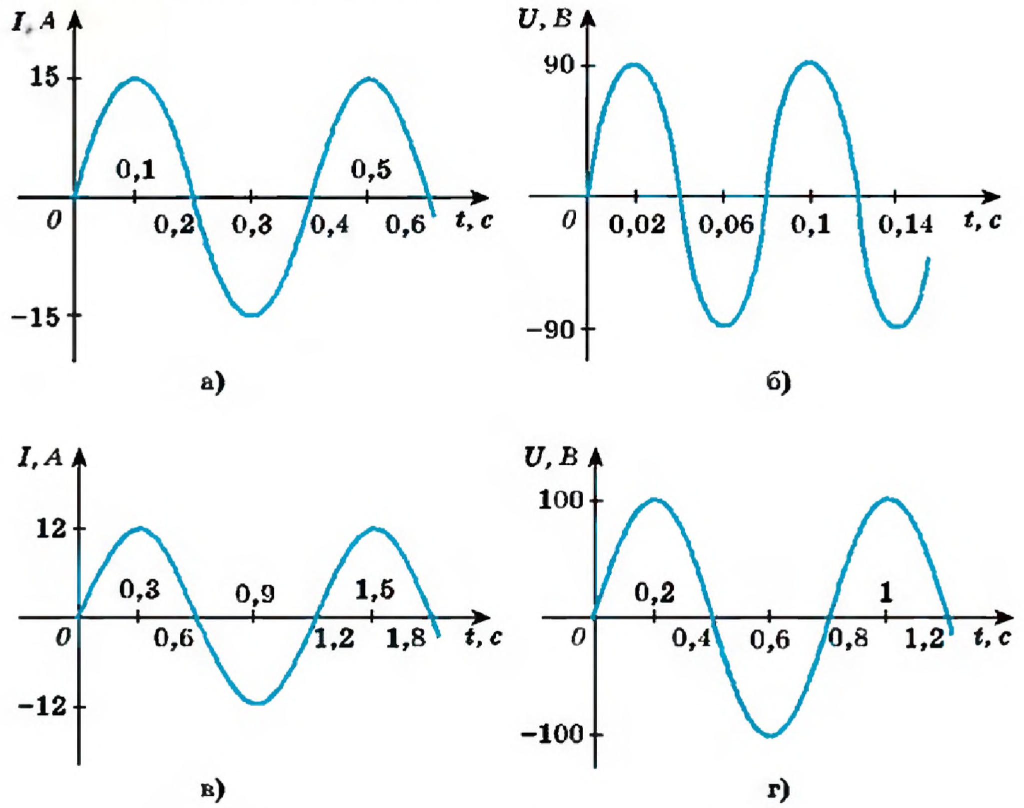
д) $y=\cos 2x$ ж) $y=\cos x-1$

е) $y = tg\frac{x}{2}$ з) $y = |\sin x|$

и) $y = \cos\frac{x}{2}$ л) $y = 2\sin x$

к) $y = ctg\frac{x}{2}$ м) $y = \sin x - 1$

3. По графику, изображенному на рисунке, определите амплитуду силы тока (или напряжения), период колебания. Запишите закон зависимости силытока (или напряжения) от времени



4. В какой ближащий момент времени t $(t > 0)$ читая от начала движения, смещение точки, совершающей гармонические колебания по закону

$$x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

а) максимально; **б) равно 2,5;**

в) равно 0; **г) равно −5?**

Практическая работа №24

Тема: Способы задания числовой последовательности, вычисления членов последовательности

Цель: способствовать усвоению понятий числовая последовательность; способы задания числовой последовательности; уметь различать различные способы задания числовых последовательностей..

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник, линейка, карандаш

Ход работы

Ответить на теоретические вопросы:
а) что называется алгебраической последовательностью?
б) что называется геометрической последовательность.
в) запишите основные расчетные формулы алгебраической и геометрической последовательности?
Рассмотрите теоретический материал по теме сделать запись в тетрадь
Изучить условие заданий для практической работы. Оформите отчет по работе.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ или (y_n).
В данном случае независимая переменная – натуральное число.

Способы задания числовой последовательности.

<u>*Словесный способ.*</u>
Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.
Пример 1. Последовательность простых чисел: 2,3,5,7,11, 3, 17, 19, 23, 29, 31, ...
Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ...
Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

<u>*Аналитический способ.*</u>
Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.
Пример 1. Последовательность чётных чисел: $y = 2n$.
Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел: $y = n^2$;

$$1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ...$$

Пример 3. Последовательность $y = 2^n$;

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^n, ...$$

<u>*Рекуррентный способ.*</u>
Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.
Пример 1. Арифметическая прогрессия: $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$, где a и d – заданные числа, d - разность арифметической прогрессии. Пусть $a_1=5$, $d=0{,}7$, тогда арифметическая прогрессия будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; ... .
Пример 2. Геометрическая прогрессия: $b_1= b$, $b_{n+1}= b_n q$, где b и q – заданные числа, $b \neq 0$, $q\neq 0$; q – знаменатель геометрической прогрессии. Пусть $b_1=23$, $q=½$, тогда геометрическая прогрессия будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; ... .

Пример 3. Последовательность Фибоначчи. Эта последовательность легко задаётся рекуррентно: $y_1=1$, $y_2=1$, $y_{n-2}+y_{n-1}$, если n=3, 4, 5, 6, ... Она будет иметь вид:

1, 1,2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (y_n), если последовательность имеет вид: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: $y_1=1$, $y_2=3$, $y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$.

3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,4 и разностью 0,9.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 3,5 и знаменателем $-\frac{2}{3}$.

5. В арифметической прогрессии $a_5= -150$, $a_6= -147$. Найдите номер первого положительного элемента этой последовательности.

6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии 22,7; 21,4; ... .

Вариант 2.

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (y_n), если последовательность имеет вид: 7, 11, 15, 19, 23, ...
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: $y_1=0$, $y_2=1$, $y_n=2y_{n-2}+y_{n-1}$.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,5 и разностью 0,8.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 4,5 и знаменателем $-\frac{2}{3}$.
5. В арифметической прогрессии $a_6= 160$, $a_6= 156$. Найдите номер первого отрицательного элемента этой последовательности.
6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии -15,1; -14,4; ... .

Практическая работа № 25

Тема: Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Цели: Научиться вычислять геометрическую прогрессию

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Если (bn) - бесконечная геометрическая прогрессия, у которой | q | 1, то сумма всех ее членов S вычисляется по формуле $\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$

Пример 1. Найдем сумму бесконечной геометрической прогрессии (bn): 6; -2; ... .

Решение

По условию b1 = 6; b2 = -2, следовательно, q = $\frac{b_2}{b_1}$ = $-\frac{1}{3}$. Имеем геометрическую прогрессию, у которой | q | 1. По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ находим:

$$S = \frac{6}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{6 \cdot 3}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

.

Ответ; 4,5.

Пример 2. Запишем число 0,(7) в виде обыкновенной дроби.

Решение

Запись 0,(7) означает бесконечный периодический дробь 0,7777....

Его можно представить как бесконечную сумму $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots$.

Слагаемые этой суммы являются членами бесконечной геометрической прогрессии, у которой b1 = $\frac{7}{10}$, q = $\frac{7}{100} : \frac{7}{10} = \frac{1}{10}$, | q | 1. Тогда эта сумма равна:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{10} : \frac{9}{10} = \frac{7}{9}$$

. Поэтому 0,(7) = $\frac{7}{9}$.

Ответ: $\frac{7}{9}$.

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Посмотрите примеры нахождения геометрической прогрессии

3. Выполните задания, используя формулы геометрической прогрессии

1.$\{в_п\}$ − геометрическая прогрессия, найдите $в_6$, если $в_1 = 4, q = \frac{1}{2}$

2.Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 12; 6;…

3.$\{в_п\}$ − геометрическая прогрессия, найдите S_5, если $в_1 = 625, q = \frac{1}{5}$

4.Вычислите S_4, если $\{в_п\}$ геометрическая прогрессия, $в_1 = 1, q = 3$

5.Найдите 8-й член геометрической прогрессии $\{в_п\}$, если $в_1 = 32, q = \frac{1}{2}$

6. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $в_1 = 2, q = 0{,}875$

7. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 9; -3; 1;…

8. Дана геометрическая прогрессия $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; .... Найдите соотношение $\frac{в_6}{в_4}$.

9. Найдите сумму членов геометрической прогрессии 8; 4; …

10. Найдите третий член геометрической прогрессии, если $S_4 = 80, \quad q = 3$

4.Выполните задания по вариантам

В следующих заданиях обведите кружком букву, соответствующую варианту правильного ответа.

Вариант 1

1. Найдите седьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -8$ и $q = 2$.
а) 1024; б) 512; в) –512; г) –1024

2. Первый член геометрической прогрессии равен –4, а знаменатель прогрессии равен –2. Найдите сумму семи первых членов этой прогрессии.
а) –172; б) 172; в) 129; г) –129

3. В геометрической прогрессии (b_n), $b_4 = 40{,}6$ и $b_9 = 1299{,}2$. Найдите формулу n-го члена.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 27, –9,3, ...
а) $13\frac{1}{2}$ б) $6\frac{3}{4}$ в) $40\frac{1}{2}$ г) $20\frac{1}{4}$

5. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, если $b_2 = 0{,}08$, $b_4 = 1{,}28$ и известно, что знаменатель прогрессии является положительным числом.
а) $27\frac{3}{10}$ б) $16\frac{19}{50}$ в) $6\frac{41}{50}$ г) $27\frac{3}{10}$

6. Геометрическая прогрессия задаётся формулой: $b_n = 4 * (-2)^{n-1}$. Найдите S_8.
а) 340; б) 85; в) –340; г) –85

7. Для периодической дроби 0,(27) найдите несократимую обыкновенную дробь. Запишите разность числителя и знаменателя.
а) 8; б) 9; в) 7; г) 10

8. Известно, что (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_1 = 3$, $q = 2$. Какой цифрой оканчивается b_{16}?
а) 2; б) 4; в) 6; г) 8

9. В 1998 г. население улуса составляло 17 тыс. человек. Ежегодно оно увеличивалось в 1,1 раза. Сколько жителей будет в улусе в 2001 году, если эта тенденция сохранится?
а) 22627; б) 20570; в) 22000; г) 24890

Вариант 2.

В следующих заданиях обведите кружком букву, соответствующую варианту правильного ответа.

1. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -6$ и $q = \frac{1}{3}$.

а) $\frac{2}{27}$ б) $-\frac{2}{27}$ в) $\frac{2}{81}$ г) $-\frac{2}{81}$

2. Первый член геометрической прогрессии равен –3, а знаменатель прогрессии равен –2. Найдите сумму семи первых членов этой прогрессии.
а) 127; б) –129; в) 129; г) –127
3. В геометрической прогрессии (b_n), $b_4 = 30{,}5$ и $b_9 = 976$. Найдите формулу n-го члена.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 32, –8, 2, ...
а) $10\frac{2}{3}$ б) $42\frac{2}{3}$ в) $25\frac{3}{5}$ г) $20\frac{3}{5}$
5. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии, если $b_2 = 0{,}08$, $b_4 = 0{,}32$ и известно, что знаменатель прогрессии является положительным числом.
а) $-2\frac{13}{25}$ б) $-5\frac{2}{25}$ в) $2\frac{13}{50}$ г) $5\frac{2}{25}$
6. Геометрическая прогрессия задаётся формулой: $b_n = 2 * (-3)^{n-1}$. Найдите S_6.
а) 365; б) –364; в) 364; г) –365
7. Для периодической дроби 0,(21) найдите несократимую обыкновенную дробь. Запишите разность числителя и знаменателя.
а) 26; б) 33; в) 78; г) 57
8. Известно, что (b_n) – геометрическая прогрессия, Какой цифрой оканчивается b_{13}?
а) 2; б) 4; в) 6; г) 8
9. В 1996 г. население улуса составляло 15 тыс. человек. Ежегодно оно увеличивалось в 1,2 раза. Сколько жителей будет в улусе в 2000 году, если эта тенденция сохранится?
а) 30104; б) 25920; в) 31104; г) 37325

Практическая работа № 26
Тема: Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций
Цель: Применение знаний дифференцирования при решении задач.
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник
Теоретический материал
*<u>Опр.</u>*Производной функции f(x) в точке x называется предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

<u>Опр</u>.Операция нахождение производной называется дифференцированием. Это правило является основным, т.к. выведено из самого определения. Однако при дифференцировании сложных функций, суммы, произведения,

частного применение общего правила представляет большие трудности. Поэтому применяют правила дифференцирования.

Правила

1. $(f'(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$ - Производная суммы равна сумме производных.
2. $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ - Постоянный множитель можно вынести за знак производной.
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ - Производная произведения.
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ Производная частного

Формулы дифференцирования

C′ = 0

(x) ′ = 1

(x^2) ′ = 2x

(x^3) ′ = $3x^2$

(x^p) ′ = p x^{p-1}

$(e^x)' = e^x$

7. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$
9. $(kx+b)'=k$
10. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
11. $(\sin x)'=\cos x$
12. $(\cos x)'=-\sin x$
13. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
14. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
15. $(a^x)'=a^x\cdot\ln x$
16. $(\log x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$
17. $f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
18. $f'(kx+b)=k\cdot f'(kx+b)$

При решении задач на нахождение уравнения касательной к графику функции в точке используется геометрический смысл производной $f'(x_0)=k$

Уравнение касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Примеры 1:

$$(x^2)'=2x^{2-1}=2x,\quad (x^3)'=3x^{3-1}=3x^2,$$

$$(x^{-1})'=(-1)\,x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2},\quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

а) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$;

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$.

а) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, поэтому

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2};$$

б) $$\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^3+1) - x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{2x(x^3+1) - x^2((x^3)'+1)'}{(x^3+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2+0)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2}.$$

Ход работы

1. Внимательно прочитайте теоретический материал
2. Перепишите в тетрадь основные правила дифференцирования, таблицу основных формул дифференцирования
2. Проанализируете примеры с решением, перепишите в тетрадь
3. Выполните задание по вариантам (Вариант 1 – решает все примеры по буквой а, Вариант 2 – под буквой б, Вариант 3 – под буквой в, Вариант 4 - г), с подробным решением в тетради

а) $f(x) = x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$; б) $f(x) = 2x^4 - x^8$;

в) $f(x) = x^4 + 4x$; г) $f(x) = x^4 - 12x^2$.

а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x)$;

в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$; г) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$.

а) $y = \frac{1+2x}{3-5x}$; б) $y = \frac{x^2}{2x-1}$; в) $y = \frac{3x-2}{5x+8}$; г) $y = \frac{3-4x}{x^2}$.

а) $y = x^8 - 3x^4 - x + 5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$;

в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1$.

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = 2x^2 - x$; б) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 - 4x$; г) $f(x) = 2x - 5x^2$.

Практическая работа № 27

Тема: Решение упражнений на вычисление производной

Цель: Отработать навыки нахождения производных
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы
1. Вспомните теоретический материал п.р № 54-55
2. Выполните задание по вариантам, указав только ответы

Вариант 1

А1. Найдите производную функции $y = 4x^3$.
1) *$12x^2$* 2)*$12x$* 3) *$4x^2$* 4) *$12x^3$*

А2. Найдите производную функции $y = 6x - 11$.
1) *-5*2)*11* 3) *6*4) *6x*

А3. Найдите производную функции $y = \frac{x-1}{x}$.
$1)-\frac{1}{x^2}\ 2)\frac{x-1}{x^2}\ 3)\frac{2x+1}{x^2}\ 4)\frac{1}{x^2}$

А4. Найдите производную функции $y = x\sin x$.
$1)\sin x - x\cos x\ 2)\sin x + x\cos x\ 3)\cos x\ 4)\ x + x\cos x$

А5. Найдите производную функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.
$1)\ \pi^2 - 1$ $2)\ 2\pi + 1$ $3)\ 2\pi - 1$ $4)\ 2\pi$

А6. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ в точке *x_o=2.*
1) *10* 2) *12* 3) *8* 4) *6*

А7. Найдите производную функции $y = \sin(3x+2)$.
1) $\cos(3x+2)$ 2) $-3\cos(3x+2)$ 3) $3\cos(3x+2)$ 4) $-\cos(3x+2)$

А8. Вычислите значение производной функции $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$ в точке *x_o= 4.*
1) *21* 2) *24* 3) *0* 4) *3,5*

А9. Вычислите значение производной функции $y = \frac{1}{2}tg(4x - \pi) + \frac{\pi}{4}$
вточке $x_0 = \frac{\pi}{4}$. 1) *2* 2)$\frac{\pi}{4}$3) *4* 4)$\frac{\pi}{2}$

А10. Найдите производную функции $y = x^2\cos x$.
$1)\ 2x\sin x\ 2) -2x\sin x\ 3)\ 2x\cos x + x^2\sin x\ 4)\ 2x\cos x - x^2\sin x$

В1. Вычислите значение производной функции $y = 14\sqrt{2x-3}$ в точке *x_o= 26.*

B2. Найдите значение *x*, при которых производная функции $y=\frac{x-2}{x^2}$ равна *0*.

Вариант 2

A1. Найдите производную функции $y=\frac{1}{3}x^6$.

$1)\,2x^6\; 2)\,2x^5\; 3)\,\frac{1}{3}x^5\; 4)\,6x^5$

A2. Найдите производную функции $y=12-5x$.

1) *7*2)*12* 3) *-5*4) *-5x*

A3. Найдите производную функции $y=\frac{x+3}{x}$.

$1)\frac{3}{x^2}\; 2)\frac{2x-3}{x^2}\; 3)-\frac{3}{x^2}\; 4)-\frac{3}{x}$

A4. Найдите производную функции $y=x\cos x$.

$1)\cos x-x\sin x\,2)\cos x+x\sin x\;3)-\sin x\;4)\,x-\sin x$

A5. Найдите производную функции $y=x^2+\cos x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$.

$1)\,\pi^2-1$ $2)\,\pi+1$ $3)\,\frac{\pi}{2}-1\;4)\,\pi-1$

A6. Вычислите значение производной функции $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+3x$ в точке $x_o=2$.

1) *13* 2) *3* 3) *8* 4) *27*

A7. Найдите производную функции $y=\cos(5x-2)$.

1) $-2\sin(5x-2)$ 2) $-5\sin(5x-2)$ 3) $5\sin(5x-2)$ 4) $\sin(5x-2)$

A8. Вычислите значение производной функции $y=\frac{3}{x}-\sqrt{x}$ в точке $x_0=\frac{1}{4}$.

1) *-47* 2) *-49* 3) *47* 4) *11,5*

A9. Вычислите значение производной функции $y=1+ctg(2x+\pi)$ вточке $x_0=-\frac{\pi}{4}$.

1) *2* 2) *-1* 3) *-2* 4) $-\frac{1}{2}$

A10. Найдите производную функции $y=x^2\sin x$.

$1)\,2x\cos x\;2)\,2x\sin x-x^2\cos x\;3)\,2x\sin x+x^2\cos x\;4)-2x\cos x$

B1. Вычислите значение производной функции $y=30\sqrt{4-3x}$ в точке $x_o=-7$.

В2. Найдите значение x, при которых производная функции $y = \frac{x+2}{x^2}$ равна *0*.

Практическая работа № 28

Тема: Решение задач на применение производной к исследованию
Цель: Научится исследовать функцию с помощью производной
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Общее исследование функции и построение её графика рекомендуется выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции
2. Выясняют функция четная или нечетная, является периодической
3. Точки пересечения с осями координат
4. Промежутки знакопостоянства
5. Промежутки возрастания и убывания
6. Точки экстремума и значения fв этих точках
7. Исследуют поведение функции в окрестностях особых точек и пребольших по модулю x

На основании такого исследования строится график функции.

Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции f и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал

3. Посмотрите пример исследования графика функций

Пример 1. Исследуем функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме.

1) $D(f) = R$, так как f — многочлен.

2) Функция f не является ни четной, ни нечетной (докажите это самостоятельно).

3), 4) График f пересекается с осью ординат в точке $(0; f(0))$; чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$, один из корней которого ($x = 1$) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства мы находить не будем (как уже отмечалось в п. 4, при-

веденная схема имеет примерный характер).

5), 6) Найдем производную функции f:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

$D(f') = R$, поэтому критических точек, для которых $f'(x)$ не существует, нет.

Заметим, что $f'(x) = 0$, если $x^2(x^2 - 1) = 0$, т. е. при значениях аргумента, равных 0, -1 и 1. Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

В первой строке этой таблицы указаны в порядке возрастания критические точки функции и ограниченные ими промежутки. Во второй строке отмечены знаки производной на этих промежутках. (На каждом таком интервале знак производной не меняется, его можно найти, определив знак производной в какой-либо точке рассматриваемого интервала.) В третьей строке записаны выводы о ходе изменения данной функции: «↗» — возрастает, «↘» — убывает, а в четвертой — о виде критических точек (пп. 5 и 6 приведенной выше схемы). Критическая точка 0 функции f не является точкой экстремума, поэтому в четвертой строке таблицы она не отмечена. Заметим, что вывод о ходе изменения функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной). Например, $f(0) < f(-1)$, поэтому на промежутке $(-1; 0)$ функция убывает (и, следовательно, $f' < 0$ на этом промежутке).

Строим график функции (рис. 111).

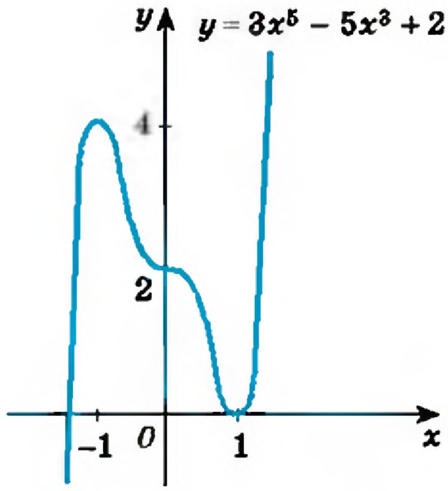


Рис. 111

Строить его удобно по промежуткам, которые указаны в таблице. Например, в таблице указано, что f убывает на интервале (0; 1). Функция f непрерывна в точках 0 и 1 (так как она непрерывна всюду), следовательно, она убывает на отрезке [0; 1]. Поэтому рисуем график убывающим на отрезке [0; 1] от значения $f(0) = 2$ до значения $f(1) = 0$. При этом касательные к графику в точках 0, ± 1 должны быть горизонтальными — во второй строке таблицы сказано, что в этих точках производная равна нулю. Аналогично строится график и на остальных промежутках.

3. Выполните задание по вариантам

Вариант 1
Исследовать функцию с помощью производной по общей схеме и построите её график.
а) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ б) $y = 1 + 2x^2 - x^4$

Вариант 2.
Исследовать функцию с помощью производной по общей схеме и построите её график.
а) $y = 2 + 3x - x^3$ б) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

Практическая работа № 29
Тема: Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции
Цель: Научится находить наибольшее, наименьшее значения и экстремальные значения функций
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал
Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, надо **вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка**, а затем из полученных чисел **выбрать наибольшее и наименьшее.**

Пример 1
Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$ на отрезке [−2; 4].

Вычислим производную данной функции $f'(x) = 36x + 24x^2 - 12x^3 = 12x(3 + 2x - x^2)$. Приравняем производную нулю, получим уравнение $x\left(3+2x-x^2\right)=0$ и найдем критические точки функции $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 3$. Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$. Видно, что в точках $x = -1$ и $x = 3$ функция имеет максимум, в точке $x = 0$ функция имеет минимум. На промежутке $[-2;\ 4]$ находятся все три точки экстремума.

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка. Эти величины приведены в таблице.

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$	-40	7	0	135	32

Из сравнения значений функции видно, что $\max\limits_{[-2;\,4]} f(x)=f(3)=135$ и $\min\limits_{[-2;\,4]} f(x)=f(-2)=-40$. В данном случае наибольшее значение функции достигается в точке максимума $x = 3$, наименьшее значение – на левой границе $x = -2$ рассматриваемого промежутка.

Пример 2

Найдем множество значений функции $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x$ на от-

Вычислим производную данной функции $f'(x)=\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2+$ $+\cos x=-\sin 2x+\cos x=\cos x(-2\sin x+1)$. Приравняем производ-

ную нулю. Получаем уравнение $\cos x(-2\sin x+1)=0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнение $\cos x=0$ и $\sin x=\frac{1}{2}$. Их решения на данном отрезке: $\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}$. Определим знак производной $f'(x)$, например при $x = 0$.

Получаем: $f'(0)=\cos 0\cdot(-2\sin 0+1)=1>0$. Теперь легко построить диаграмму знаков производной. Видно, что в точках $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{6}$

функция $f(x)$ имеет максимум, в точке $x=\frac{\pi}{2}$ – минимум. Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка. Эти величины приведены в таблице.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Из сравнения значений функции видно, что множество значений функции на данном промежутке $\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{3}{4}$. Видно, что наименьшее значение функция достигает в точке минимума и на концах данного отрезка, наибольшее значение – в точках максимума, то есть $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = \frac{1}{2}$ и $\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал и примеры с решением

2. Выполните задание аналогично выполненным в примерах

Вариант 1 - а,в Вариант 2 - б,г

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на промежутках $[-1; 1]$ и $[0; 3]$;

б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ на промежутках $[-4; -1]$ и $[1; 3]$;

в) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ на промежутках $[0; 2]$ и $[2; 3]$;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ на промежутках $[-3; -2]$ и $[1; 5]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на данном промежутке:

а) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $[0; 2\pi]$;

б) $f(x) = 1{,}5x^2 + \frac{81}{x}$, $[1; 4]$;

в) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$;

г) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$, $[-5; -2{,}5]$.

Практическая работа № 30

Тема: Решение задач по правилам вычисления первообразной.

Цель: Научится вычислять первообразные функций

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполнено равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1

Функция $F(x) = x^5$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на промежутке $(-\infty; \infty)$, так как для всех x из этого интервала выполнено равенство $F'(x) = (x^5)' = 5x^4 = f(x)$.

Заметим, что функция $\overline{F}(x) = x^5 + \sqrt{3}$, например, также является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на R, так как $\overline{F}'(x) = (x^5 + \sqrt{3})' = (x^5)' + (\sqrt{3})' = 5x^4 = F'(x) = f(x)$. Очевидно, что если вместо числа $\sqrt{3}$ поставить любую постоянную величину, результат от этого не изменится. Следовательно, задача **нахождения первообразной** имеет **бесконечно много решений** (или говорят, что первообразная вычислена с точностью до постоянной).

Пример 2

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на R, так как для всех x из этого интервала выполнено равенство $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$. Так же как и в примере 1, функция $\overline{F}(x) = \sin x + C$ (где C – любая постоянная величина) тоже первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на R, так как выполнено равенство $\overline{F}'(x) = f(x)$.

Таблица первообразных для функций

Функция $f(x)$	k (постоянная)	x^n $(n \neq -1)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Первообразная $F(x)$ (общий вид)	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Функция $f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Первообразная $F(x)$ (общий вид)	$\arcsin x + C$; $-\arccos x + \overline{C}$	$\operatorname{arctg} x + C$; $-\operatorname{arcctg} x + \overline{C}$

Правила нахождения первообразных

Правило 1. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то функция $F(x) + G(x)$ – первообразная для функции $f(x) + g(x)$. Можно сформулировать короче: **первообразная для суммы функций равна сумме первообразных каждой функции.**

Пример 1

Найдем первообразную для функции $f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sin^2 x}$.

Учтем, что функция $f(x) = x^4 - x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\sin^2 x}$ представляет собой алгебраическую сумму трех функций. Используя таблицу первообразных и правило 1, найдем: $F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + C.$

Правило 2. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ – первообразная для функции $kf(x)$. Или короче: **первообразная для произведения числа и функции равна произведению числа на первообразную функции.**

Исходя из определения первообразной и используя правило дифференцирования, получаем: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

Правило 3. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная для функции $f(kx+b)$, где k и b – постоянные. Короче: **первообразная для функции, зависящей от аргумента $kx+b$ (где k и b – постоянные), равна произведению числа $\frac{1}{k}$ на первообразную для функции от x при значении аргумента $kx+b$.**

Учитывая правило дифференцирования сложной функции, получаем: $\left(\frac{1}{k}F\left(kx+b\right)\right)' = \frac{1}{k}F'\left(kx+b\right)\cdot k = F'\left(kx+b\right) = f\left(kx+b\right).$

Пример 3

Найдем первообразную функции $f(x)=\cos(\sqrt{5}x+3)$.

Так как первообразная для функции $\cos x$ есть функция $\sin x$, то в соответствии с правилом 3 первообразная для функции $f(x)=\cos(\sqrt{5}x+3)$ − функция $F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}x+3)+C$.

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал
2. Запишите в тетрадь правила вычисления первообразных, таблицу
3. Выполните задания используя таблицу и правила вычисления первообразных

Вариант 1- а,в   Вариант 2 – б,г

Найдите общий вид первообразных для функции f

а) $f(x) = 2 - x^4$;   б) $f(x) = x + \cos x$;

в) $f(x) = 4x$;   г) $f(x) = -3$.

а) $f(x) = x^6$;   б) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$;

в) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$;   г) $f(x) = x^5$.

а) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$;   б) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$;   г) $f(x) = 5x^2 - 1$.

а) $f(x) = (2x - 3)^5$;   б) $f(x) = 3\sin 2x$;

в) $f(x) = (4 - 5x)^7$;   г) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

а) $f(x) = \frac{3}{(4-15x)^4}$;   б) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$;

Практическая работа №31

Тема: Решение задач на вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Цель: Отработать навыки решения задач на вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал:

Формула Ньютона-Лейбница $S = F(b) - F(a)$

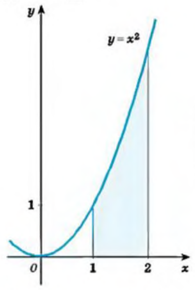
Ход работы

1.Прочитать теоретический материал

2. Повторить таблицу первообразных

3. Разобрать пример вычисления площади криволинейной трапеции, переписать в тетрадь

Пример. Вычислим площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2$, прямыми $y = 0$, $x = 1$ $x = 2$



Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Следовательно,

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

4. Выполнить задание:

Вариант 1 нечетные цифры, буквы а,г

Вариант 2 четные цифры, буквы б,в

Вычислите площадь фигур по формуле Ньютона-Лейбница

1) $y = 3x - 1$, $x = 2$, $y = 0$; 2) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$;

3) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; 4) $y = (x + 1)^2$, $y = 0$, $x = 0$;

5) $y = x^3 + 1$, $y = 1$, $x = 2$; 6) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$;

7) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; 8) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$;

а) $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$;

б) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

в) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; г) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$, $x = 0$.

Практическая работа №32

Тема: Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей

Цель: Закрепление знаний в применении интеграла к вычислению физических величин и площадей

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

С помощью определённого интеграла можно решать различные задачи физики, геометрии и т.д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

1. <u>Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном , неравномерном движении.</u>

$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\upsilon(x)\,dx$ - путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2,

$\upsilon(x)$ - скорость неравномерного движения

<u>Задача</u>

Скорость движения материальной точки задаётся формулой $\upsilon(x)=4t^3-2t+1$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 4 с от начала движения.

<u>Решение</u>

$$S=\int\limits_0^4\left(4t^3-2t+1\right)dt=\left(\frac{4t^4}{4}-\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^4=\left(t^4-t^2+t\right)\Bigg|_0^4=4^4-4^2+4-0=256-16+4=244\ м$$

Ответ: 244 м

<u>Вычисление работы, затраченной на растяжение и сжатие пружины.</u>

$A=k\int\limits_{x_1}^{x_2}x\,dx$ - работа силы упругости, где k – коэффициент упругости пружины, x_1 – начальное положение пружины, x_2 – конечное положение пружины .

F = k · ∆x - закон Гука, где k – коэффициент упругости пружины, ∆x - изменение длины пружины.

<u>Задача</u>

Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

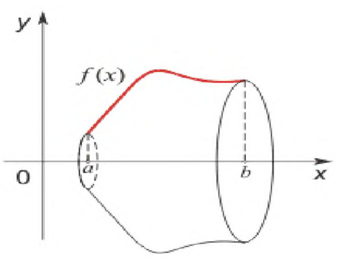
<u>Решение</u>

$$F=k\cdot\Delta x\qquad k=\frac{F}{\Delta x}=\frac{10}{0{,}02}=\frac{1000}{2}=500\ \text{Н/м}$$

$$A=500\int\limits_0^{0{,}02}x\,dx=500\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}02}=250x^2\Bigg|_0^{0{,}02}=250\cdot0{,}02^2-0=250\cdot0{,}0004=0{,}1\,Дж.$$

Ответ: A = 0,1Дж

<u>Определение объёма тела вращения.</u>



$$v = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\,dx$$ - объём тела вращения , где S(x) – площадь сечения фигуры плоскостью перпендикулярной оси Ох

Ход работы.

1. Прочитайте теоретический материал
2. Выполните задания по вариантам

1 вариант.

Скорость прямолинейно движущегося тела v = (4t – t^2) м/с. Вычислить путь, пройденный телом за первые 5 сек.

Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,02 м требуется сила в 10 Н.

Фигура, ограниченная прямыми у = - х + 3, х = 0, х = 3, у = 0 вращается вокруг оси Ох. Найти объём полученного тела вращения.

2 вариант.

Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки, если его скорость определяется по формуле v = (6t – $2t^2$) м/с.

Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 4 см, если при растяжении её на 1 см нужна сила в 10 Н.

Фигура, ограниченная кривой у = $\frac{1}{x}$ и прямыми х = 2, х = 3 . Найти объём тела, полученного при вращении кривой вокруг оси Ох.

Практическая работа №33

Тема: Нахождения корней уравнения

Цель: Отработать навыки нахождения корней уравнения

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы

1**.**Для решения рациональных уравнений (1-10) достаточно провести безошибочно необходимые преобразования, и уметь решать квадратное уравнение. Напомним, что мы можем:

1. Умножать и делить левую и правую части уравнения на одно и то же число или выражение.
2. Прибавлять к обеим частям уравнения или вычитать одно и то же число (выражение).

По-другому эта операция звучит так: перенос слагаемых, из левой части в правую и наоборот, при этом знак слагаемого изменяется на противоположный.

3. Можем возводить в квадрат и извлекать квадратный корень из обеих частей.

Квадратное уравнение (общий вид):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Находим дискриминант $D = b^2 - 4ac$

Находим корни по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

И главное. Обязательно делайте проверку после того как найдёте корни. В некоторых примерах вы получите два корня и вам будет нужно выбрать один из них. Так вот – проверку делайте для обоих корней, а затем выбирайте указанный в условии корень. Только в этом случае ошибка будет практически исключена.

2. Вспомним алгоритм решения рационального уравнения (11-14)

1. Перенести все члены уравнения в одну часть.

2. Преобразовать эту часть уравнения к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$

3.решить уравнение p (x) = 0.

4. для каждого корня уравнения p(x)=0 сделать проверку: удовлетворяет ли он условию q(x) не равно 0 или нет. Если да, то это – корень заданного уравнения; если нет, то это – посторонний корень и в ответ его включать не следует.

3. Найдите корень уравнения: Вариант 1 – четные числа, Вариант 2 - нечетные

$$\frac{x-41}{x-5} = 3 \qquad \frac{1}{4x+1} = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{9x-20}{x+18} \qquad \frac{x-119}{x+7} = -5$$

$$\frac{11}{x^2+7} = 1 \qquad x = \frac{6x-15}{x-2}$$

$$\frac{7x}{2x^2-15} = 1 \qquad \frac{9}{x^2-16} = 1$$

$$\frac{x+5}{7x+11} = \frac{x+5}{6x+1} \qquad \frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$$

11. $\frac{2x}{x-3} + \frac{11}{2} = \frac{3}{x}$ 12. $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$

13.$\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1$ 14. $\sqrt{-9x^2 + 3x - 6} = \sqrt{-6x - 24}$

Практическая работа №1

Тема: Нахождения корней уравнения

Цель: Закрепить способы решения уравнений различными способами.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Сведения из теории:

Метод разложения на множители

Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Проще всего уяснить эту идею на конкретном примере.

Пример 1.

Решите уравнение методом разложения на множители: $2{,}5x^2 + 4x = 0$.

Решение:

осуществим разложение на множители (представим исходное выражение в виде произведения). Для этого вынесем переменную x за скобки:

$$x(2{,}5x + 4) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно,

$$x = 0 \text{ или } 2{,}5x + 4 = 0.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$2{,}5x = -4 \text{ или } x = -1{,}6.$$

Ответ: $x = 0$ и $x = -1{,}6$.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение методом разложения на множители: $3x^2 + 1{,}5x = 0$.

Метод замены переменной

Суть данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной. Все эти идеи проще осознать на конкретном примере.

Пример 2.

Решите уравнение методом замены переменной: $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

Решение:

такие уравнения называются биквадратными. Перепишем его в виде:

$$(x^2)^2 + 4x^2 - 5 = 0.$$

Введем новую переменную $t = x^2$.Тогда исходное уравнение примет следующий простой вид:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Решая полученное квадратичное уравнение, получаем, что:

$$t = -5 \text{ или } t = 1.$$

Возвращаемся теперь к старой переменной (обратная замена):

$$x^2 = -5 \text{ или } x^2 = 1.$$

Решений у первого уравнения нет, поскольку не существует такого действительного числа, квадрат которого был бы отрицателен. Второе уравнение имеет два корня ± 1.

Ответ: ± 1.

Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение методом замены переменной: $9x^4 - 24x^2 + 7 = 0$.

Пример 3 .

Решите уравнение методом замены переменной: $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.

Решение:

обращаем внимание на то, что $x=0$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на x. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Введем новую переменную: $t=4x+\frac{7}{x}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{4}{t-8}+\frac{3}{t-10}=1.$$

Выполнив элементарные преобразования: приведем дроби к общему знаменателю, приведем подобные слагаемые, получим:

$$\frac{t^2-25t+144}{(t-8)(t-10)}=0.$$

Дробь равна нулю, если нулю равен ее числитель, а знаменатель при этом не равен нулю. То есть уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t^2-25t+144=0 \\ t\neq 8 \\ t\neq 10 \end{cases}.$$

Решив первое уравнение системы, имеем: t=16 или t=9.

Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. $4x+\frac{7}{x}=16$, что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-16x+7=0$, решая которое, получаем $x=\frac{1}{2}$ или $x=\frac{7}{2}$.

2. $4x+\frac{7}{x}=9$ что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-9x+7=0$, у которого решений нет, поскольку его дискриминант отрицателен.

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите уравнение методом разложения на множители: $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=0$.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть решения уравнения методом разложения на множители?
2. В чем суть решения уравнения методом замены переменной?

Практическая работа №4
Тема: Основные приемы решения уравнений.
Цель: Изучить и закрепить основные приемы решения уравнений. Решение систем уравнений
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник
Теоретический материал
Опр.
Показательными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.
1) Простейшие уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно привести к одному основанию решаются так:
$5^x=625 \quad \Rightarrow 5^x=5^4 \Rightarrow x=4. \qquad \textit{Ответ}: x=4$
2) Уравнения вида $2^x+2^{x-1}-2^{x-3}=4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.
3) Уравнения, вида $7^{2x}-48\cdot 7^x=49$ решаются с помощью подстановки a^x = y, сводится к квадратному.
Тригонометрические уравнения
Способы решения
1. Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям
2. Однородные уравнения
3. Разложение на множители
4. Замена переменной
5. Метод вспомогательного угла
Ход работы
1. Рассмотреть примеры решения показательных уравнений
Пример. Решить уравнение: $5^{2x+1}-26\cdot 5^x+5=0$
Решение: $5^x=y$,
$5y^2-26y+5=0$,
$D=676-4\cdot 25=576$,
$y_1=5, \quad y_2=\frac{1}{5}$
$5^x=5$
$x=1$,

$5^x = \frac{1}{5}$

$x = -1$

Ответ: $x = 1$ и $x = -1$

4) Прирешения уравнения вида $a^x = b^x$ обе части уравнения необходимо разделить на b^x, т.к. $b^x \neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0 .$$

2.Рассмотреть примеры решения тригонометрических уравнений

1.Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям

2cos²x+sinx+1=0

2*(1-sin²x)+sinx+1=0

2-2sin²x+sinx+1=0

-2sin²x+sinx+3=0

Пустьа=sinx

-2a²+a+3=0

a1=-1, a2=1,5

Sinx=-1   sinx=1,5

X=-П/2+2Пn,   неткорней

2. Однородные уравнения

3sin²x+sinxcosx=2cos²x

Делим на sin²x обе части уравнения

3+cosx/ sinx=2cos²x/sin²x

Известно ,что ctgx= cosx/sinx

Получим 3+ctgx=2ctg²x

Пустьа=ctgx

3+a=2a²

2a²-a-3=0

a1=1,5   a2=-1

Получимctg x=1,5   ctg x=-1

X=arcctg1,5+Пn   x=3П/4+Пm

3. Рассмотреть пример решения системы уравнений

Например, систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7 \end{cases}$ **заменой**

$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ **можно привести к системе**

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25, \\ u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7, \\ v = 12. \end{cases}$$

Зная u и v, по теореме, обратной к теореме Виета, находим x и y из квадратного уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$: $t_1 = 3$, $t_2 = 4$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

4. Решите уравнения по вариантам

Вариант 1

1. Решить показательные уравнения:

а) $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$ б) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$; в) $4 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x + 1 = 0$

2. Решите тригонометрические уравнения

а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;

б) $\cos 2x + \sin x = 0$;

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 1; \end{cases}$

Вариант 2

1. Решить показательные уравнения:

а) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} = 2$; б) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$; в) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

2. Решите тригонометрические уравнения

а) $\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;

б) $\cos 2x + \cos x = 0$;

3. Решите систему уравнений:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10; \end{cases}$

Практическая работа №2

Тема: Равносильность уравнений. Преобразование уравнений.

Цель: Владение стандартными приемами находить корни, обобщать, систематизировать, видеть равносильность преобразования уравнений.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

Образец решения:

<u>Пример 1</u>

Уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x+2)(2^x - 4) = 0$ - равносильны?

Решение:

$$x^2 - 4 = 0 \text{ имеет корни } x = \pm\mathbf{2}, \quad \text{т.к. } x^2 = 4;$$

$$(x+2)(2^x - 4) = 0, \quad \text{т.к. } x + 2 = 0, \quad \boldsymbol{x = -2}$$

и $2^x = 4,\ 2^x = 2^2,\ x = \mathbf{2}$.

Ответ: да, так как имеют одинаковые корни.

<u>Пример 2</u>

Проверить на равносильность уравнения: $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} + 2 = 0$.

Решение:

$x^2+1=0$ – неимееткорнейвобластидействительныхчисел и$\sqrt{x}+2=0$ – неимееткорнейвобласти$R=(-\infty;\ +\infty)$

Ответ: равносильны, так как они не имеют корней.

<u>Пример 3</u>

Определить уравнение-следствие при решении уравнений$x-2=3$ и $x^2-25=0$.

Решение:

Уравнение$x-2=3$ имеет корень 5, уравнение $x^2-25=0$ имеет корни ± 5. Так как корень уравнения $x-2=3$ является корнем уравнения $x^2-25=0$, то уравнение$x^2-25=0$ является следствием уравнения $x-2=3$.

<u>Пример 4</u>

Решить двумя способами уравнения и сделать вывод:

а) $\sqrt{x+11}=x-1$;

б)$\sqrt{x-5}=\sqrt{2-x}$.

Решение:

а) *<u>первый способ:</u>*

ОДЗ:

$$x+11\geq 0$$
$$x\geq -11$$

$(\sqrt{x+11})^2=(x-1)^2$, $\quad x+11=x^2-2x+1$

$x^2-3x-10=0$,

$x_1=-2$; $\quad x_2=5$.

Оба корня принадлежат ОДЗ уравнения, но это не меняет сути дела и мы вынуждены выполнить проверку корней.

Проверка: при $x_1=-2$, получим $\sqrt{-2+11}=-2-1$ - неверное равенство, $x_1=-2$ - посторонний корень;

при $x_2=5$, получим $\sqrt{5+11}=5-1$ или $4=4$ - верное равенство, 5 - корень исходного уравнения.

Ответ: 5

<u>второй способ:</u>

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+11=(x-1)^2 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \langle=\rangle \begin{cases} x_1=-2, x_2=5 \\ x\geq 1 \end{cases}$$

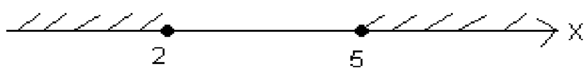
Решение системы исходного уравнения $x_2=5$.

Ответ: 5

б) *<u>первый способ:</u>*

ОДЗ:

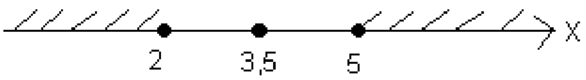
$$\begin{cases} x-5\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \langle=\rangle \begin{cases} x\geq 5 \\ x\leq 2 \end{cases}$$



Решений нет

Значит, ОДЗ уравнения пустое множество, уравнение решений не имеет
Ответ: корней нет
второй способ:
Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-5=2-x \\ x-5\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \langle=\rangle \begin{cases} x=3{,}5 \\ x\geq 5 \\ x\leq 2 \end{cases}$$



Системы решений не имеют, значит, и исходное уравнение тоже решений не имеет
Ответ: корней нет.

Вывод: При решении иррациональных уравнений – возведение обеих частей уравнения в четную степень, принадлежность полученных корней ОДЗ уравнения не позволяет сделать вывод, о том являются ли эти корни посторонними или нет. Поэтому выполнение проверки корней обязательно и это этап решения уравнения. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он, конечно, посторонний корень уравнения. В то же время, записывая систему равносильную уравнению, мы не нарушаем логики решения: ведь уравнение спустой ОДЗ равносильно системе, не имеющей решений.

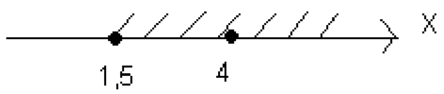
Пример 5
Решить уравнение: $|2x-3|=5$
ОДЗ:
$x\in R=(-\infty;\ +\infty)$.

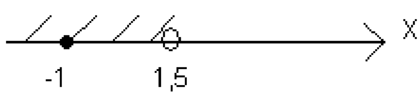
Решение: Данное уравнение равносильно системам,на основании определения

модуля: $|a|=\begin{cases} a, \text{если} a\geq 0 \\ -a, \text{если} a<0 \\ 0, \text{если} a=0: \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ 2x-3=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3<0 \\ -2x+3=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\geq 1{,}5 \\ x=4 \end{cases} \begin{cases} x<1{,}5 \\ x=-1 \end{cases}$$



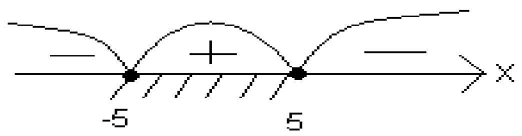
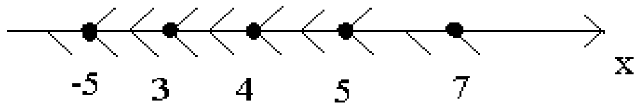


$x=4$ $x=-1$

Ответ: -1; 4.

Пример 6

Являются ли уравнения равносильными: $2^x - 2^{x-4} = 15$ и $x + \sqrt{25 - x^2} = 7$?

Решение: $2^x - 2^{x-4} = 15$ – показательное уравнение По свойству степеней: $2^x - \frac{2^x}{2^4} = 15, \qquad 2^x\left(1^{16} - \frac{1}{16}\right) = 15$ $2^x = 2^4$, $x = 4$ – корень уравнения	$x + \sqrt{25 - x^2} = 7$ – иррациональное уравнение ОДЗ: $25 - x^2 \geq 0$  $x \in [-5;\ 5]$ Данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 25 - x^2 = (7 - x)^2 \\ 7 - x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 25 - x^2 = 49 - 14x + x^2 \\ x \leq 7 \end{cases}$ $2x^2 - 14x + 24 = 0$ $x^2 - 7x + 12 = 0$ $x_1 = 4, \qquad x_2 = 3$ – корни уравнения, так как принадлежат ОДЗ, т.е. геометрически: 

Ответ: неравносильны, таккакуравнениияимеютнеодинаковыекорни.

Ход работы

Посмотреть образцы решения уравнений, записать в тетрадь

Выполнить задание по вариантам

1 вариант

Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения:

$$a * b = d * b \text{ и } a = d$$

были равносильны

Решить 2-мя способами уравнение:

$2\sqrt{1 - x^2} = x - 2$ и сделать вывод

Равносильны ли уравнения:

2 вариант

Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения:

$$\sqrt{a} = b \text{ и } a = b^2$$

были равносильны

Решить 2-мя способами уравнение:

$\sqrt{x + 1} = x - 1$ и сделать вывод

Равносильны ли уравнения:

$5^{x+1} + 5^x = 750$ и $x^2 - 9 = 0$?

Решить уравнение:
$\sin 4x = 0$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm 2$

Найти корень уравнения:

$$\frac{2x-9}{2x-5} - \frac{3x}{2-3x} = 2$$

$6^{x+2} - 6^x = 35$ и $x^2 = 0$?

Решить уравнение:
$\cos 6x = 1$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm\frac{1}{2}$

Найти корень уравнения:

$$\frac{2x-1}{x-3} + \frac{5-4x}{3-x} = 6$$

Практическая работа №3

Тема: Основные приемы решения уравнений.

Цель: Обобщить и систематизировать знания по решению уравнений

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы:

Ответьте на контрольные вопросы:

А) Какие уравнения называются показательными?

Б) Основные свойства степени с рациональным показателем.

В) Основные свойства степени с действительным показателем.

Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач

Сделать краткие записи в рабочей тетради.

Изучить условие заданий практической работы. Оформить отчет о работе.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x)=g(x)$ равносильны для любого числа $a>0$, $a \neq 1$.

Методы решения показательных уравнений

1. Простейшие показательные уравнения

Пример 1. Решите уравнение: 34x-5 = 3x+4 .

Решение. 34x-5 = 3x+4; 4x -5 = x+4; 3x=9; x = 3 .

Ответ:3

2. Методы преобразования показательных уравнений к простейшим.

А. Метод уравнивания оснований.

Пример 2. Решите уравнение: $27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$.

Решение. $27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$

$3^3 \cdot 3^{4x-9} - (3^2)^{x+1} = 0$; $3^{3+(4x-9)} - 3^{2(x+1)} = 0$; $3^{4x-6} - 3^{2x+2} = 0$;

$3^{4x-6} = 3^{2x+2}$; $4x-6=2x+2$; $2x = 8$; $x=4$.

Ответ: 4.

Пример 3. Решите уравнение: $2^{2x} \cdot 3^{3x} \cdot 5^x - 60^{4x-15}=0$.

Решение. $(2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15} =0$; $(2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x = 60^{4x-15}$;

$4^x \cdot 3^x \cdot 5_x = 60^{4x-15}$; $(4 \cdot 3 \cdot 5)^x = 60^{4x-15}$; $60^x=60^{4x-15}$;

$x=4x-15$; $3x=15$; $x=5$.

Ответ: 5.

В. Уравнения, решаемые разложением на множители.

Пример 4. Решите уравнение: $x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x + 8x-16$.

Решение. $x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x + 8x - 16$, $2^x - 2 \cdot 2^x = 8 \cdot (x-2)$, $2^x \cdot (x-2) - 8 \cdot (x-2) = 0$

$(x-2) \cdot (2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2^x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{2;3\}$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	**Вариант 2**
$9^x = 3^{2\sqrt{2}}$	$7^{x\sqrt{3}} = \sqrt{7}$
$2^{2x+1} = 32$	$2^{2+x} = 4$
$3 \cdot 9^x = 81$	$2 \cdot 4^x = 64$
$2^{x+2} + 2^x = 5$	$3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13$
$4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$	$2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x = 4$

Практическая работа №5

Тема: Решение систем уравнений

Цель: Обобщить и систематизировать знания по изучаемой теме Закрепить умения использовать полученные знания при решении уравнений и неравенств графическим методом.

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы:

Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач.

Сделать краткие записи в рабочей тетради.

Под руководством преподавателя выполнить задания для самоконтроля.

Изучить условие заданий для практической работы. Оформить отчет

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

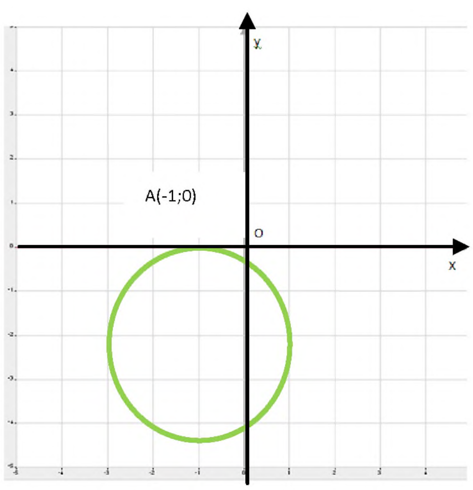
Графическое решение систем уравнений

Решить графически систему уравнений - это значит найти координаты общих точек графиков уравнений, построенных в одной системе координат.

Пример 1. Решите графически систему уравнений.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (x+1)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Решение. 1. $(x+1)^2 + (x+1)^2 = 4$ - уравнение окружности с центром в точке с координатами (-1;-2) и радиусом $r = 2$



2. $y = 0$ – уравнение оси Ox

Общая точка:
A(-1:0), значит
$x = -1, \quad y = 0$.

Проверка:

$x=-1$, $y=0$, то система примет вид:

$\begin{cases}(-1+1)^2+(0+2)^2=4 \\ \ y=0\end{cases}$, $\begin{cases}0^2+2^2=4 \\ y=0\end{cases}$, $\begin{cases}4=4 \\ y=0\end{cases}$

Значит, (-1;0) решение системы   Ответ: (-1;0)

<u>Графическое решение системы неравенств</u>

Решить графически систему неравенств – это значит найти область решений, координаты которой будут удовлетворять обеим неравенствам.

Пример. Решите графически систему неравенств: $\begin{cases}x^2+y<0 \\ y-2x>0\end{cases}$.

Решение. Преобразуем первое и второе неравенства системы: $\begin{cases}y<-x^2 \\ \ y>2x\end{cases}$

$y = x^2$ - квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз

$y = 2x$ - линейная функция, график – прямая

1. A(0;-1), неравенство примет вид:
   0-1<0(истинно) , значит координаты всех точек внутренней области параболы без границы являются решениями первого неравенства.
2. B(-1;0), неравенство примет вид:
   0+2>0(истинно), значит координаты всех точек области над прямой без границы являются решениями второго неравенства.

<u>Вывод</u>: Т.о, координаты всех точек во внутренней области параболы, но лежащие выше прямой без границы являются решениями системы неравенств.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант.	**2 вариант.**
1. Решить графически систему уравнений: $\begin{cases}y-\sqrt{x}=1 \\ \ x\cdot y=1\end{cases}$. 2. Решить графически систему неравенств: $\begin{cases}y^2+y^2\le 9 \\ \ x-y\ge 3\end{cases}$.	1. Решить графически систему уравнений: $\begin{cases}\ y=\sqrt{x} \\ x+y=2\end{cases}$. 2. Решить графически систему неравенств: $\begin{cases}y^2+y^2\le 4 \\ \ x-y\ge 2\end{cases}$.

Практическая работа №6

Тема: Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств

Цель: Владение стандартными приемами находить корни, обобщать, систематизировать, видеть равносильность преобразования уравнений.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

Пример 1. Графически решить уравнение: $x^5 = 3 - 2x$.

Решение:

Построим графики функций $y = x^5$ и $y = 3 - 2x$(Рис. 1).
Графиком функции $y = x^5$является парабола, проходящая через точки $(-1; -1), (0; 0), (1; 1)$.

График функции $y = 3 - 2x$– прямая, построим её по таблице.

x	0	$\frac{3}{2}$
y	3	0

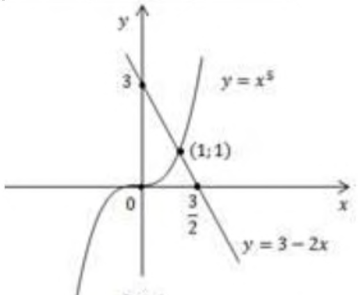


Рис. 1

Графики пересекаются в точке $(1; 1)$.Других точек пересечения нет, т. к. функция $y = x^5$монотонно возрастает, функция $y = 3 - 2x$монотонно убывает, а, значит, их точка пересечения является единственной.
Ответ: $x = 1$.
Пример 2. Решить неравенство
a. $x^5 > 3 - 2x$;
b. $x^5 \leq 3 - 2x$.
Решение:
a. Чтобы выполнялось неравенство, график функции $y = x^5$должен располагаться над прямой $y = 3 - 2x$(Рис. 1). Это выполняется при$x > 1$.
b. В этом случае, наоборот, парабола $y = x^5$должна находиться под прямой. Это выполняется при$x \leq 1$.
Ответ:
a. $x > 1$;
b. $x \leq 1$.
Пример 3. Решить неравенство $x^{-2} > 2x - 1$.
Решение:
Построим графики функций $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = 2x - 1$ (Рис. 2).

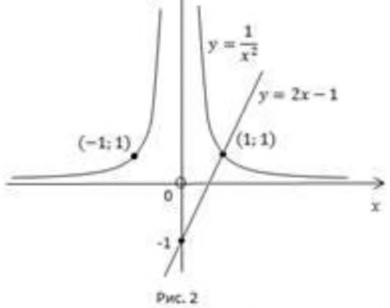


Рис. 2

Найдем корень уравнения $\frac{1}{x^2} = 2x - 1$. При $x < 0$ нет решений. При $x > 0$ существует одно решение $x = 1$.

Чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{x^2} > 2x - 1$, гипербола $y = \frac{1}{x^2}$ должна располагаться над прямой $y = 2x - 1$. Это выполняется при $0 < x < 1$ и $x < 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0;\ 1)$.

Пример 4. Решить графически неравенство:

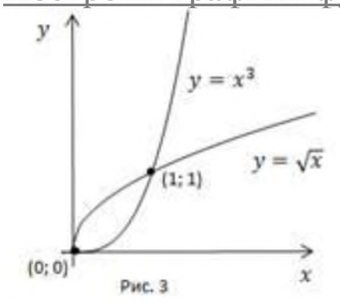
a. $x^3 \le \sqrt{x}$;

b. $x^3 \ge \sqrt{x}$.

Решение.

Область определения: $x \ge 0$.

Построим графики функций $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$ для $x \ge 0$ (Рис. 3).



a. График функции $y = x^3$ должен располагаться под графиком $y = \sqrt{x}$, это выполняется при $x \in [0; 1]$.

b. График функции $y = x^3$ расположен над графиком $y = \sqrt{x}$ при $x \ge 1$. Но т. к. в условии имеем нестрогий знак, важно не потерять изолированный корень $x = 0$.

Ответ:

a. $x \in [0; 1]$.

b. $x \in [1; +\infty) \cup x = 0$.

Вариант 1.Часть 1

При выполнении заданий этой части укажите цифру, которая обозначает выбранный вами ответ.

А1. Решите уравнение $x^2 - 4x + 4 + |x^2 - 3x + 2| = 0$.

1) -2; 2) 2; 3)1; 4) не имеет корней.

А2. Решите уравнение $2 - x = \sqrt{x + 18}$ и укажите верное утверждение о его корнях.

1) корень только один, и он положительный;

2) корень только один, и он отрицательный;

3) корней два, и они разных знаков;

4)корней два, и они отрицательные.

А3. Найдите область значений функции $g(x) = 2\sin x - 1$.

1)[-2;0]; 2)[-2;1]; 3)[-3;1]; 4)[-2;2].

Часть 2

Ответом на каждое задание этой части работы будет некоторое число. Это число надо вписать рядом с номером задания.

В1. Решите уравнение $(2x^2-9x)\sqrt{2-x}=-9\sqrt{x-2}$. (Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму всех его корней).

В2. Решите уравнение $\cos^2((x-3)\cdot\sin x)=1+|\log_3(x^2-5x+7)|$

В3. Решите неравенство $3\cos^2 x\ge 3+|\log_5(x^2-4x+1)|$

Часть 3

На листке запишите номер задания, а затем приведите полное, обоснованное решение.

С1. Найдите нули функции $y=\ln^2(x^2-3x-9)+\sqrt{x^3-8x-8}$

Вариант 2.

Часть 1

При выполнении заданий этой части укажите цифру, которая обозначает выбранный вами ответ.

А1. Решите уравнение $x^2-10x+25+|x^2-9x+20|=0$.

1) -5; 2) 5; 3)4; 4) не имеет корней.

А2. Решите уравнение $x-4=\sqrt{31-6x}$ и укажите верное утверждение о его корнях.

1) корней два, и они разных знаков;

2) корней два, и они положительные;

3) корень только один, и он положительный;

4) корень только один, и он отрицательный.

А3. Найдите область значений функции $h(x)=3+\lg x$.

1)[3;+∞); 2)(-∞;+∞); 3)(-∞;3); 4)(3;+∞).

Часть 2

Ответом на каждое задание этой части работы будет некоторое число. Это число надо вписать рядом с номером задания.

В1. Решите уравнение $x^2\sqrt{x-1}-4\sqrt{1-x}=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму всех его корней).

В2. Решите уравнение $\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log_{\frac{2}{5}}\sqrt{x^2+x+1}$

В3. Решите неравенство $\log_{0{,}2}(-x^2+6x-8)\le -9+6x-x^2$

Часть 3

На листке запишите номер задания, а затем приведите полное, обоснованное решение.

С1. Найдите нули функции $y=\sin^2\pi x+\dfrac{12}{\ln^2(x^2-x+1)}$.

Практическая работа №7

Тема: Решение задач на применение бинома Ньютона и треугольника Паскаля
Цели: Научиться решать задачи с применением бинома Ньютона
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал
Треугольник Паскаля – Это бесконечная числовая таблица «треугольной формы», в которой по сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц, получается как сумма двух предшествующих чисел.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Формула бинома Ньютона – для всех действительных чисел *a,b* и для всех натуральных чисел *n* имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^4 = \sum_{r=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$, где

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ и где коэффициенты $C_n^k, 0 < k < n$ называют *биномиальными коэффициентами*, а так же числом сочетаний и *n* элементов по *k*.
Существует связь между числами сочетаний и треугольником Паскаля:
Например:
$(a+b)^0=1$
$(a+b)^1=a+b$
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
Вывод: строки биноминальных коэффициентов, совпадают с 0 – й, 1 – й, 2 – й, 3 – й, 4 –й и т. д. строками треугольника Паскаля.

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-k}^k \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{n+1}{2^n}$$

Пример:

Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5\cdot(-2) + C_6^2x^4\cdot(-2)^2 + C_6^3x^3\cdot(-2)^3 +$$
$$+ C_6^4x^2\cdot(-2)^4 + C_6^5x\cdot(-2)^5 + C_6^6\cdot(-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5\cdot(-2) + 15x^4\cdot 4 + 20x^3\cdot(-8) +$$
$$+ 15x^2\cdot 16 + 6x\cdot(-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

Найти девятый член разложения $(2+\sqrt{a})^{12}$.

Решение. Девятый член $T_{k+1} = T_9$, значит, $k = 8$, $n = 12$.

По формуле $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ найдем $T_9 = C_{12}^8 2^{12-8}(\sqrt{a})^8 = \frac{12!}{8!4!}2^4a^4$.

$$T_9 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 2^4\cdot a^4 = 7920a^4.$$

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал.
2. Прочитайте пример с решением и запишите в тетрадь
3. Выполните задания:

Вариант 1.Задание. Найти разложение $(1-\sqrt{2})^6$.

Вариант 2.Задание. **Найти средний член разложения бинома Ньютона**

$$\left(2x^2y - \frac{1}{x^2y}\right)^6$$

Практическая работа №8

Тема: Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач

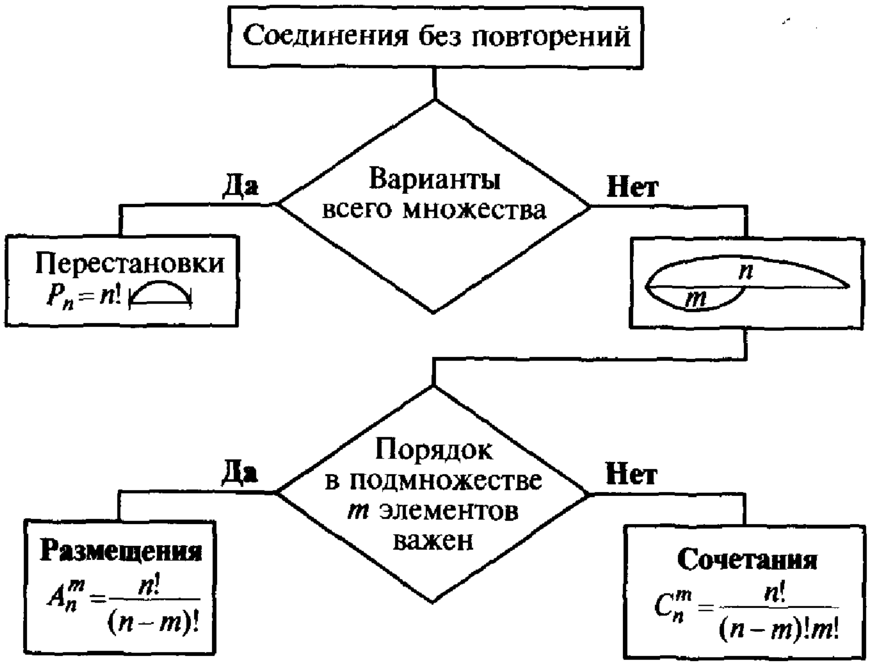
Цель: Научиться решать комбинаторные задачи

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Алгоритм решения комбинаторных задач



Ход работы:

1. Повторите алгоритм решения задач
2. Посмотрите применение алгоритма при решении задач, перепишите задачи в тетрадь

Пример 1. Восемь студентов обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

Решение. В рукопожатии участвует «подмножество», состоящее из двух студентов ($m = 2$), тогда как все «множество» студентов составляет 8 человек ($n = 8$). Наглядное представление «на отрезке» соотношения подмножества и множества удобно для выбора соединения (рис. 1.4).

Так как в процессе рукопожатия порядок не важен, выбираем формулу сочетаний

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28.$$

Пример 2. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг из пяти различных по цвету отрезов материи?

Решение. Порядок важен, так как перестановка материи внутри трехцветного флага обозначает разные страны. Поэтому выбираем формулу размещений без повторений, где множество отрезов материи содержит $n = 5$, а подмножество — $m = 3$ цветов:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Пример 3. Сколькими способами можно расставить на книжной полке девять книг, среди которых есть трехтомник А.С.Пушкина?

Решение. Так как три тома, входящие в трехтомник, должны стоять рядом, причем по возрастанию номера тома слева направо, рассматриваем их как один элемент данного множества, в котором имеется еще шесть элементов. Поэтому выбираем перестановки без повторений во множестве, содержащем семь элементов:

$$P_7 = 7! = 5040.$$

3. Решите задачи

Задача 1.7. Сколько имеется вариантов составления расписания на понедельник, если предметов у студентов 9, а в понедельник четыре пары занятий и предметы не повторяются?

Задача 1.9. Сколькими способами можно назначить в группе из 30 человек трех дежурных?

Задача 1.10. Сколько существует шестизначных телефонных номеров, у которых: а) возможны любые цифры; б) все цифры различные?

Задача 1.11. Сколькими способами можно выделить делегацию в составе трех человек, выбирая их среди четырех супружеских пар, если:

а) в состав делегации входят любые трое из данных восьми человек;

б) делегация должна состоять из двух женщин и одного мужчины;

в) в делегацию не входят члены одной семьи?

Практическая работа № 9.

Тема: Размещения, сочетания и перестановки

Цели: Закрепить навыки решения задач на размещения, сочетания, перестановки

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

*Опр.***Перестановками** из *n* разных элементов называются соединения, которые состоят из *n* элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из п элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле $\boldsymbol{P_n = n!}$

n! (n – факториал) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots\ n$

*Пример.*Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на котором поставлены 12 приборов?

Решение

$\boldsymbol{P_{12} = 12! =}$ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots\ 12 = 479\,001\,600$ *Ответ:* 479 001 600

Опр.

Комбинации из *m* элементов по *n*элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются **размещениями.**

Обозначаются A_m^n и вычисляются по формуле $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, $A_n^n = n!$

Пример

Сколько существует вариантов распределения трёх призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

Решение

$A_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 210$ *Ответ:* 210 вар

Опр. **Сочетаниями** называются все возможные комбинации из *m* элементов по *n*, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

Обозначают C_m^n и вычисляют по формуле $C_n^m = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$

Пример

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 2 карты?

Решение

$C_{36}^2 = \dfrac{36!}{(36-2)! \cdot 2!} = \dfrac{36!}{34! \cdot 2!} = 630$

Ответ: 630 способов

Ход работы

1. Прочитать теоретический материал
2. Посмотреть применение формул на примере задач
3. Выполнить задание по вариантам

1 вариант.

1. Вычислить: 1) P_7 ; 2) A_8^3; 3) C_8^5
2. Вычислить: 1) $\dfrac{10!}{8! \cdot 3!}$; 2) $\dfrac{8! - 6!}{5!}$
3. Решить задачи:

    1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 9 предметов?

    2) В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

    3) Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в 6 классных комнатах (по одной группе в комнате)?

Записать разложение Бинома: $(x-2)^4$

2 вариант.

1. Вычислить: 1) P_6 ; 2) A_8^5; 3) C_8^3
2. Вычислить: 1) $\frac{6!\cdot 4!}{8!}$; 2) $\frac{9!-7!}{6!}$
3. Решить задачи:
   1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 4 предмета из 8 предметов?
   2) Имеются 3 билета на просмотр 3-х различных кинофильмов. Сколькими способами 8 друзей могут распределить между собой эти 3 билета?

Сколькими разными способами можно составить график очерёдности ухода в отпуск 8 сотрудников лаборатории?

Записать разложение Бинома: $(3x-2)^4$

Практическая работа № 10

Тема: Вычисление вероятностей. Представление числовых данных

Цель: Закрепить навыки вычисления вероятностей, представления числовых данных

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A_1 к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$ – вероятность случайного события

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. $0\le P(A)\le 1$

Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному – вероятность P(A)=1

Теоремы сложения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

P(A+B)=P(A)+P(B);

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Для трех совместных событий имеет место формула:
P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)
Событие, противоположное событию А (т.е. ненаступление события А), обозначают $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице: P(A)+P($\overline{A}$)=1
Вероятность наступления события А, вычисленная в предположении, что событие В уже произошло, называется**условной вероятностью** события А при условии В и обозначается P_B(A) или P(A/B).
Если А и В – независимые события, то
P(B)- P_A(B)= $P_{\overline{A}}$(B).
События А,В,С,… называются **независимыми в совокупности,** если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

Теоремы умножения вероятностей.

Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:
P(AB)=P(A)•P(B)
Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле:
P($A_1 A_2 \dots A_n$)=P(A_1)•P(A_2)… P(A_n).

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:
P(AB)=P(A)• P_A(B)=P(B)• P_B(A)

Ход работы

1. Прочитать теоретический материал
2. Посмотреть решение задач, переписать задачи в тетрадь

Задача 1.

В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?
Решение: Событие А-билет выигрышный. Общее число различных исходов есть n=1000
Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле P(A)=$\frac{m}{n}$, получим P(A)= $\frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$ = 0,2

Задача 2.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.
Решение: Событие А-появление черного шара. Общее число случаев n=5+3=8

Число случаев m, благоприятствующих появлению события А, равно 3

P(A)= $\frac{m}{n}$ = $\frac{3}{8}$ = 0,375

Задача 3.

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение: Событие А- появление двух черных шаров. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по 2

n=C_{20}^{2}= $\frac{20\cdot19}{1\cdot2}$ = 190

Число случаев m, благоприятствующих событию А, составляет

n=C_{2}^{8}= $\frac{8\cdot7}{1\cdot2}$ = 28

P(A)= $\frac{m}{n}$ = $\frac{28}{190}$ = $\frac{14}{95}$ = 0,147

Задача 4.

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.

Задача 5.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно

Задача 6.

В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение: Пусть А - появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимы. Найдем P(A)=4/12=1/3, P(B)=3/12=1/4, получим P(AB)=P(A)•P(B)=(1/3)•(1/4)=1/12=0,083

Задача 7.

В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение: Введем следующие обозначения: А – первая взятая деталь стандартная; В – вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет P(A)=8/12=2/3. Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т.е. условная вероятность события В, равна P_A (B)=7/11.

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

P(AB)=P(A)• P_A(B)=(2/3)•(7/11)=14/33=0,424

Самостоятельное применение знаний, умений и навыков.

3. Выполнить задание по вариантам

Вариант 1.
Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?
Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты она три раза упадет гербом к верху?
Вариант 2.
Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30?
В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 – немецкий, а 50 – знают оба. Какова вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка?

Практическая работа №10
Тема: Вычисление вероятностей. Представление числовых данных.
Цель работы: научиться строить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины;
составлять закон распределения дискретной случайной величины.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Сведения из теории:
Случайное событие может состоять, в частности, в появлении некоторого числа, значение которого не может быть однозначно определено условиями его возникновение. Такие события называют случайными величинами. В этой трактовке мы сохраняем классический подход к понятию случайного события. Однако требование корректности в построении математических теорий заставляет нас вновь обратиться к аксиоматическому подходу, сохранив классические модели в качестве наглядных образцов из сферы практических приложений.
Математически корректно определить случайную величину как числовую функцию, заданную в пространстве элементарных событий.

Предположим вначале, что пространство элементарных событий является конечным множеством. Соответствующую ему случайную величину называют дискретной: она может принимать лишь конечное число значений, каждому из которых может быть сопоставлена вероятность его появления в опыте. Поэтому дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень всех ее возможных значений, а $p_1, \ldots, p_n$ – соответствующие им вероятности.

Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины.

События $X=x_i$, (i=1, 2, ,3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.

Пример 1.

Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение:

искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5, 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – 2 случая и третьему – 1 случай. Найдем их вероятности:

$P(x_1)$=47/50=0,94;

$P(x_2)$=2/50=0,04;

$P(x_3)$=1/50=0,02.

Тогда закон распределения случайной величины имеет вид:

X_i	0	5	30
p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $p_1+p_2+p_3$=0,94+0,04+0,02=1.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

2 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

3 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	10	20	30	40
p	0,3	0,1	0,2	0,4

4 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	5	104	15	20
p	0,1	0,3	0,2	0,4

2) Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X – сумма очков при обоих подбрасываниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

2) В коробке находятся 7 карандашей, из которых 4 – красные. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

5 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,1	0,2	0,5	0,2

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

6 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,1	0,3

2) Стрелок делает по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

7 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	1	4	7	10
p	0,3	0,4	0,2	0,1

2) В коробке находятся 9 карандашей, из которых 4 – синие. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных синих карандашей?

8 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	304	5
p	0,3	0,5	0,2

2) Игральную кость бросают трижды. Случайная величина X – сумма очков при трех подбрасываниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

9 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Стрелок делает по мишени четыре выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,2. Построить ряд распределения числа попаданий.

Контрольные вопросы:
Дайте определение случайного события.
Что называется случайной величиной?
Поясните закон распределения дискретной случайной величины.

Практическая работа №11
Тема: Понятие о задачах математической статистики. Решение практических задач с применением вероятностных методов
Цель: научиться применять формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины;
Сведения из теории:
Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.
Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.
Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда ее *математическое ожидание* $M(X)$ определяется равенством
$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$.
Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.
Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, P_i=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно
$M(X)$ = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3,5.
Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.
Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик.

Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.
Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.
Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:
$D\{X) = M[X- M(X)]^2$.
Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:
$D\{X) = M(X^2)- [M(X)]^2$,
т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.
Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:
$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.
Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 1.

Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.
Решение:
случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:
M(X)= $1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5$.
Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:
x_1^0=1-3,5; x_2^0=2-3,5; x_3^0=3-3,5; x_4^0=4-3,5; x_5^0=5-3,5; x_6^0=6-3,5.
Вычислим дисперсию:
$$D(X)=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа появлений герба.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2 вариант

1) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	4	7	10	13
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2) Монету подбрасывают 6 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения «решки».

4 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
p	0,15	0,17	0,35	0,21	0,12

2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения герба.

5 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	10	30	40	60	70
p	0,3	0,13	0,45	0,1	0,02

3) Игральную кость подбросили 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

6 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	5	10	15	20
p	0,1	0,11	0,2	0,22	0,37

3) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

7 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	10	20	30
p	0,125	0,375	0,5

2) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит

8 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	10	30	50
p	0,175	0,35	0,475

2) Игральный кубик имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4, 5, 6. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит кубик.

пирамида.	

Контрольные вопросы:
Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
Что называется дисперсией дискретной случайной величины?

Практическая работа №12
Тема: Решение прикладных задач
Цель: Отработать навыки решения задач на перестановки, сочетания и размещения, навыки применения правил комбинаторики.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Порядок выполнения работы:

1. Ответьте на контрольные вопросы:
   а) Что называется перестановками, размещением и сочетанием?
   б) Чем отличается сочетания от размещений и перестановок?
   в) Сформулируйте основные правила комбинаторики?

2. Изучить условие заданий для практической работы. Оформить отчет о работе.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.

Задача 1. Сколькими способами можно разместить 5 цветочных горшков на подоконнике?

Задача 2. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Задача 3 Из 9 учащихся нужно составить группу из 3 человек для участия в мероприятии. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 4. 20 студентов из группы уже получили зачет по физике. 13 студентов получили зачет по химии. А 7 студентов получили зачеты и по физике и по химии. Сколько человек в группе всего?

Вариант 2.

Задача 1. Сколькими способами можно разместить на полке 5 книг?

Задача 2. Сколькими способами можно составить команду из 3 человек для участия в мероприятии, если выбрать нужно из 8 претендентов.

Задача 3. Имеется 4 компьютеров и три пользователя. Сколькими способами можно рассадить каждого?

Задача 4. 16 студентов группы летом будут работать, 15 - поедут отдыхать, из них 5 будут работать, а затем поедут отдыхать. Сколько человек всего в группе?

Практическая работа № 13

Тема: Взаимное расположение прямых и плоскостей

Цель: Применение знаний при решении задач.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы:

Ответить на вопрос и выполнить рисунок.

1.Прямые m и n лежат в одной плоскости. Могут ли эти прямые пересекаться, быть параллельными, могут ли они скрещиваться?

2. Прямые b и c пересекаются. Как расположена прямая b относительно прямой d, если $c \parallel d$?

3. Даны скрещивающиеся прямые c и d. Как может быть расположена прямая c относительно m, если $m \parallel d$?

4. Прямые b и d пересекаются. Как расположена прямая b относительно c, если c и d пересекаются?

5. Даны скрещивающиеся прямые m и n. Как может быть расположена прямая m относительно прямой c, если c и n пересекаются?

II. Выполнить рисунок и заполнить таблицу.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина B_1C_1, F – середина D_1C_1, K – середина DC, O – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD.

	Прямые	Взаимное расположение прямых
1	AA_1 и CC_1	
2	A_1C_1 и B_1D_1	
3	A_1C_1 и C_1D_1	
4	A_1M и CC_1	
5	A_1D и DC_1	
6	A_1C_1 и BD	
7	A_1C и AC	
8	A_1B и D_1C	
9	A_1C и BB_1	
10	A_1D и AB	
11	A_1M и BC	
12	A_1M и BK	
13	C_1K и B_1F	
14	C_1O и AB_1	
15	A_1O и B_1D	

III. Указания к выполнению

1.Прочитать соответствующий заданию раздел по учебному пособию «Геометрия» Л. С. Атанасян, введение страницы 3-7, глава I §1 страницы 9-12, §2 страницы 15-16,глава II§1 страница 34.

2.Найти ответы на вопросы

Контрольные вопросы

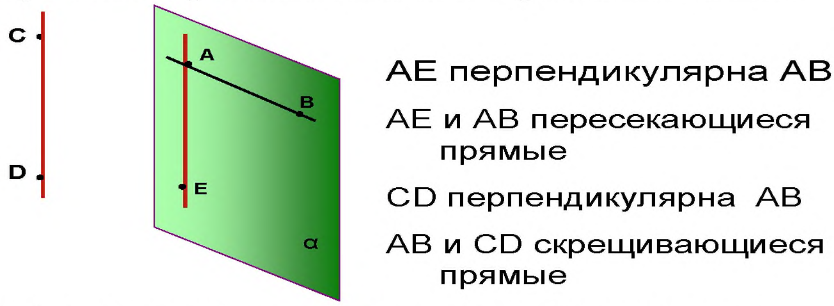
1.Что изучает стереометрия?

2. Какие существуют основные фигуры в пространстве?
3. Какие аксиомы существуют в стереометрии?
4. Какие следствия из аксиом существуют в стереометрии?
5. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
6. Какие прямые называются скрещивающимися?
7. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

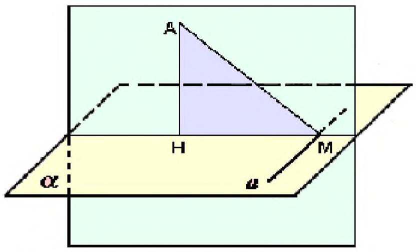
Практическая работа № 14
Тема: Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах.
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал
При решении задач используется определение перпендикулярных прямых в пространстве.
Опр.
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Обратить внимание на то, что в пространстве перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.



Признак перпендикулярности прямой и плоскости
Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.
В задачах часто используется *теорема о 3-х перпендикулярах*:
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
Обратная теорема
Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней,
перпендикулярна и к её проекции.
При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью необходимо помнить, что углом между прямой и плоскостью является наименьший угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



АН- перпендикуляр
АМ- наклонная
НМ – проекция наклонной на данную плоскость
a - прямая, проходящая через основание наклонной

Ход работы

1. Прочитать теоретический материал
2. Посмотреть задачу с решением стр. 39 № 129 «Геометрия 10-11»
3. Решить задачу № 154 учебника «Геометрия 10-11»

Записав условие, сделав следующий чертеж:

№ 154. ***Дано:*** **ΔABC, $BD \perp (ABC)$, BD = 9 см, AC = 10 см, $BC = BA$ = = 13 см (рис. 4).**

***Найти*: а) расстояние от точки D до AC;**
б) $S\Delta ACD$.

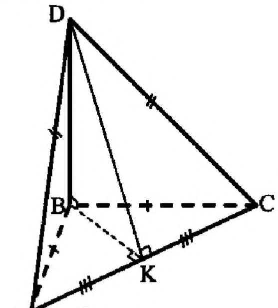


Рис. 4

4. Решить задачи по вариантам

1 вариант.

1. Дан тетраэдр МАВС, в котором
МВ $\perp$ ВА. Доказать, что ΔМВД – прямоугольный, если Д – произвольная точка отрезка АС. Найти МД и площадь ΔМВД, если
МВ = ВД = а.
2. Из точки М проведён перпендикуляр МД = 6 см к плоскости квадрата. Наклонная МО образует с плоскостью квадрата угол 60°. О – точка пересечения диагоналей. Доказать, что ΔМОД – прямоугольный. Найти площадь квадрата.

2 вариант.

1. Четырёхугольник АВСД – квадрат, О – его центр. Прямая ОМ перпендикулярна плоскости квадрата. Доказать, что МА = МВ = МС = МД. Найдите МА, если АВ = 4 см, ОМ = 1 см.
2. Из точки М проведён перпендикуляр к плоскости ΔАВС. ВМ = 9 см, АС = 10 см,

ВС = ВА = 13 см. Найдите расстояние от точки М до прямой АС.

3 вариант.

1. Расстояние от точки М до каждой из вершин правильного треугольника АВС равна 4 см. Найти расстояние от точки М до плоскости треугольника АВС, если
АВ = 6 см.
2. Из точки М проведён перпендикуляр МВ = 4 см к плоскости прямоугольника АВСД. Наклонные МА и МС образуют с плоскостью прямоугольника углы 45° и 30° соответственно. Доказать, что ΔМАД и ΔМСД прямоугольные. Найти стороны прямоугольника.

4 вариант.

1. Через вершину А прямоугольного треугольника АВС с прямым углом С проведена прямая АД, перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что
ΔСВД – прямоугольный. Найти ВД, если ВС = 4, ДС = 5.
2. Через вершину В ромба АВСД проведена прямая ВМ, перпендикулярная его плоскости. Найти расстояние от точки М до прямых, содержащих стороны ромба. Если АВ = 25 см, ∠ ВАД = 60°, ВМ = 12,5см.

Практическая работа № 15.

Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости.

Цель: Применение знаний при решении задач.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

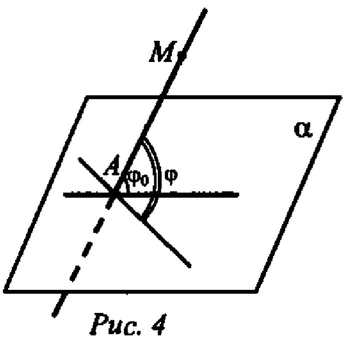


Рис. 4

Определение:

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 4).

φ_0 – угол между прямой AM и плоскостью α является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A.

1) **Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. Угол между прямой и плоскостью считается равным 90°.**
2) **Если прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной.**

Понятие угла между прямой и плоскостью не вводим.

Угол между параллельными прямой и плоскостью считать равным 0°.

Ход урока

1. Прочитайте теоретический материал

2. Пример решения задачи

Задача

Найдите **угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, если каждая из точек P и Q равноудалена от концов отрезка AB.**

Решение: $PA = PB = m$; $QA = QB = n$. **Точки P и Q лежат в плоскости α, проходящей через середину AB и $AB \perp \alpha$. $PQ \subset \alpha$ и $PQ \perp AB$, то есть искомый угол 90°. (*Ответ*: 90°.)**

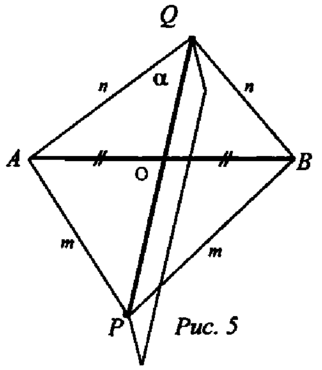
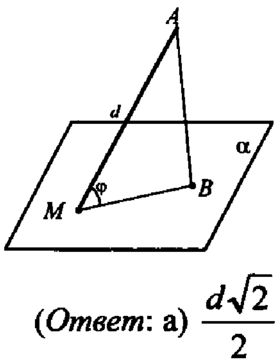


Рис. 5

Задача *Дано:* $AM = d$; $\angle AMB = \varphi$; а) 45°; б) 60°; в) 30°

Найти: MB.

Решение:



а) $MB = d\cos\varphi = d \cdot \cos 45° = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$;

б) $MB = d\cos 60° = d \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{d}{2}$;

в) $MB = d\cos 30° = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$.

(*Ответ*: а) $\dfrac{d\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{d}{2}$; в) $\dfrac{d\sqrt{3}}{2}$.)

3. Решите задачи самостоятельно в тетради сделав чертеж

Вариант I. Задача № 208.

Вариант II. Задача № 209. учебник «Геометрия 10-11 кл»

Практическая работа № 16

Тема: Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей

Цель: Закрепить свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей решением задач

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал стр. 20-24 и 47-49
2. Ответе письменно на вопросы:

1. **Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек?**
2. **Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны?**
3. **Плоскости α и β параллельны, прямая *m* лежит в плоскости α. Верно ли, что прямая *m* параллельна плоскости β?**
4. **Верно ли, что если прямая *a* параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая *a* имеет только одну общую точку?**
5. **Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α й плоскости трапеции?**
6. **Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?**
7. **Верно ли, что линия пересечения двух плоскостей параллельна одной из этих плоскостей?**
8. **Верно ли, что любые четыре точки лежат в одной плоскости?**
9. **Верно ли, что если две стороны треугольника параллельны плоскости α, то и третья сторона параллельна плоскости α?**

Посмотрите решение задач

***Дано*: $\alpha \parallel \beta$, α пересекается с γ (рис. 5).**

***Доказать*, что β пересекается с γ.**

***Решение*: Пусть γ пересекает α по прямой *a*. Проведем в плоскости γ прямую *b*, пересекающую *a*. Прямая *b* пересекает α, поэтому она пересекает параллельную ей плоскость β (задача № 55). Следовательно, и плоскость γ, в которой лежит прямая *b*, пересекает плоскость β.**

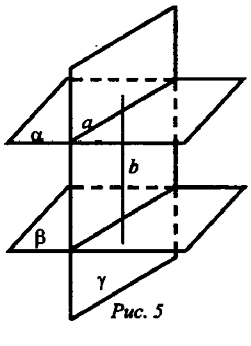


Рис. 5

2. *№ 172. Дано:* ΔABC, $\angle C = 90°$, AC лежит в плоскости α, угол между плоскостями α и ABC равен 60°, $AC = 5$ см, $AB = 13$ см (рис. 4).

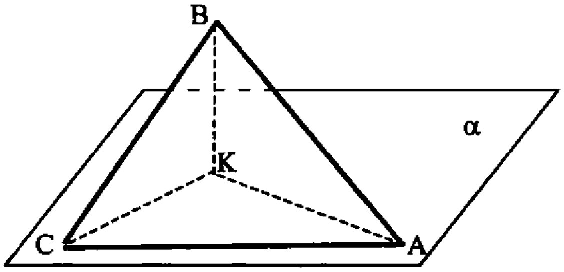


Рис. 4

Найти: расстояние от точки B до плоскости α.

Решение: Построим $BK \perp \alpha$. Тогда KC – проекция BC на эту плоскость. $BC \perp AC$ по условию, значит, по теореме о трех перпендикулярах, $KC \perp AC$. Отсюда следует, что $\angle BCK$ – линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью треугольника $\angle BCK = 60°$. Из ΔBCA по теореме Пифагора: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Из ΔBKC: $BK = = BC \cdot \sin 60° = 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3}$ (см). (*Ответ*: $6\sqrt{3}$ см.)

Решите задачи по вариантам

Вариант 1

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AB = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2.

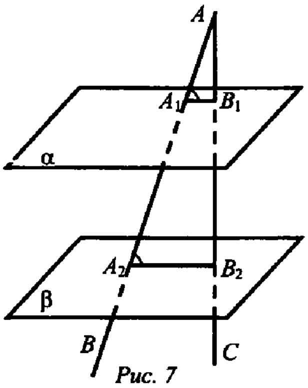


Рис. 7

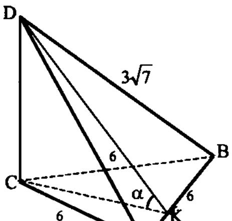


Рис. 5

№ 173. Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $CD \perp (ABC)$. $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$ (рис. 5).

Найти: двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

Вариант 2

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AB = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2.

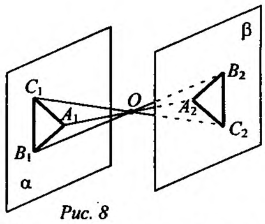


Рис. 8

№ 174. *Дано:* $ABCD$ – тетраэдр, $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90°$, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

Найти: двугранный угол $ABCD$.

Решение:

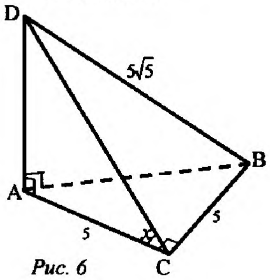


Рис. 6

Практическая работа № 17

Тема: Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.

Цель: сформировать умение применять свойства и теоремы к решению задач по изучаемой теме.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

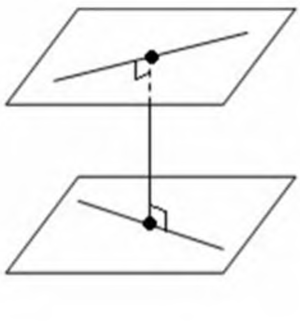
Порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал, сделайте краткую запись в тетради.
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.



Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости — длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из любой точки этой прямой.

Расстояние между двумя плоскостями определяется величиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки взятой на одной плоскости, на другую плоскость.

Задания для самостоятельного решения.

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^0$) катет AC равен 8 см. Из вершины B к плоскости данного треугольника проведен перпендикуляр BD. Расстояние между точками A и D равно 10 см. Найдите расстояние от точки D до катета AC.
2. В единичном кубе $A \dots D_1$ найдите расстояние между вершиной A и:
а) вершиной C_1; б) ребром CC_1; в) гранью BB_1C_1C.
3. Точка M удалена от всех вершин прямоугольного треугольника на расстояние a. Гипотенуза треугольника равна c. Найдите расстояние от точки M до плоскости данного треугольника.
4. В кубе $A \dots D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися ребрами AB и B_1C_1.

Вариант 2

1. Катеты прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^0$) равны 15 см и 20 см. Из вершины C к плоскости треугольника проведен перпендикуляр CD, равный 5 см. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB.
2. В единичном кубе $A \dots D_1$ найдите расстояние между вершиной D_1 и:
а) вершиной B; б) ребром AB; в) гранью BB_1C_1C.
3. Из точки K на плоскость b опущен перпендикуляр длиной d и проведены две наклонные, углы которых с перпендикуляром составляют 30^0. Угол между наклонными равен 60^0. Найдите расстояние между основаниями наклонных.
4. В кубе $A \dots D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися ребрами DC и BB_1.

Практическая работа № 18

Тема: Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции .Изображение пространственных фигур.

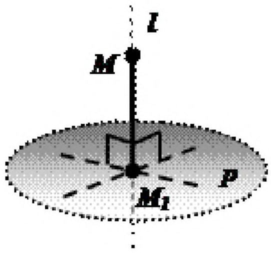
Цель: Применение знаний при решении задач.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования. Ортогональное проектирование - это такое параллельное проектирование, при котором прямая проектирования перпендикулярна плоскости проекции. Ортогональное проектирование широко применяется в техническом черчении, где фигура проектируется на три плоскости - горизонтальную и две вертикальные.

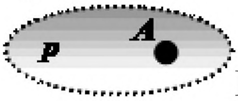


<u>Определение</u>: Ортогональной проекцией точки М на плоскость p называется основание M_1перпендикуляра MM_1, опущенного из точки М на плоскость p.

<u>Обозначение</u>: $MM_1 \perp p$, $MM_1 \cap p = M_1$, $пр_p\ M = M_1$.

<u>Определение</u>: Ортогональной проекцией фигуры F на плоскость p называется множество всех точек плоскости, являющихся ортогональными проекциями множества точек фигуры F на плоскость p.

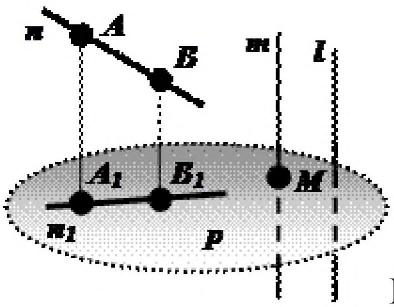
Ортогональное проектирование, как частный случай параллельного проектирования, обладает теми же свойствами:



При проектировании точка пространства отображается в точку плоскости проекции.

Каждая точка плоскости проекции отображается на себя.

$A \in p$; $пр_p\ A = A$



Проекция прямой, не параллельной прямой проектирования, есть прямая, а проекция прямой, параллельной прямой проектирования, есть точка -точка пересечения проектируемой прямой и плоскости проекции.

p - плоскость проекции;

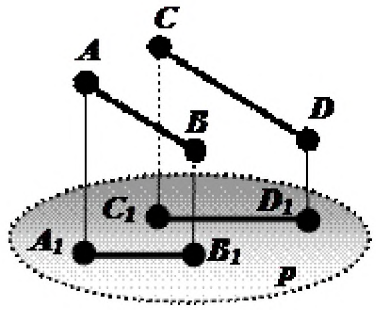
l- прямая проектирования; $l \perp p$;

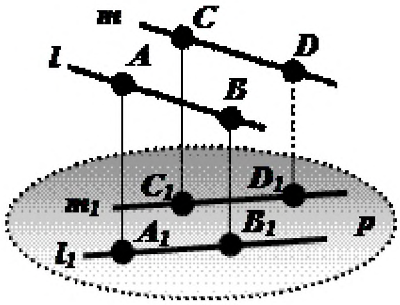
1) $пр_p\ n = n_1$;

2) $пр_p\ m = M$, $m \cap p = M$.

Проекции параллельных прямых параллельны.

$(n \parallel m,\ \ пр_p\ n = n_1,\ \ пр_p\ m = m_1) \Rightarrow (n_1 \parallel m_1)$





Отношение длин проекций двух параллельных отрезков равно отношению длин проектируемых отрезков.

$$\left(AB \| CD,\ пр_p AB = A_1B_1,\ пр_p CD = C_1D_1\right) \Rightarrow \left(\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}\right)$$

ПЛОЩАДЬ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Теорема: Площадь проекции плоского многоугольника на некоторую плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Выполните упражнения

Упражнения:

Какой фигурой может быть проекция:

a) прямой; b) плоскости; c) треугольника; d) окружности?

Всегда ли проекции параллельных прямых суть параллельные прямые?

На плоскости а даны две точки A и B. Отрезки AA_1 и BB_1 перпендикулярны к плоскости а . Найдите $\angle BB_1A_1$, если $\angle AA_1B_1 = 60^\circ$.

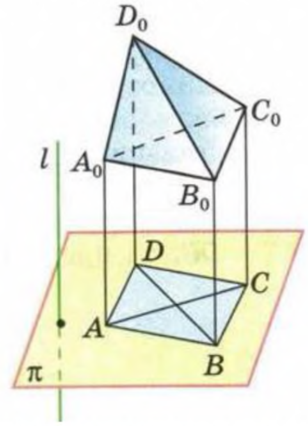
Дан ромб с острым углом 60° и сторонами 25 см. Через одну из сторон проведена плоскость. Длина проекции другой стороны на эту плоскость равна 20 см. Найдите длины проекций диагоналей.

5. Найти площадь треугольника, плоскость которого наклонена к плоскости проекции под углом 30°, если проекция его – правильный треугольник со стороной а.

6. Найти площадь треугольника, плоскость которого наклонена к плоскости проекции под углом 30°, если проекция его – равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и основанием 12 см.
7. Найти площадь треугольника, плоскость которого наклонена к плоскости проекции под углом 30°, если проекция его – треугольник со сторонами 9, 10 и 17 см.
8. Вычислить площадь трапеции, плоскость которой наклонена к плоскости проекции под углом 60°, если проекция её – равнобедренная трапеция, большее основание которой 44 см, боковая сторона 17 см и диагональ 39 см

Практическая работа № 19
Тема: Взаимное расположение пространственных фигур.
Цель: научится строить фигуры в пространстве
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, чертежные принадлежности

Ход работы:
Прочитайте теоретический материал учебника геометрия 10-11 кл авт. А.С Атанасян стр. 220-226, выпишите определения в тетрадь



Посмотрите пример построения тетраэдра

Тетраэдр

Пусть $A_0B_0C_0D_0$ — произвольный тетраэдр, A, B, C и D — параллельные проекции его вершин на плоскость изображений (рис. 239). Отрезки AB, BC, CA, AD, BD, CD служат сторонами и диагоналями четырехугольника $ABCD$. Фигура, образованная из этих отрезков (или любая другая фигура, подобная ей), является изображением тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$.

Можно доказать, что фигура, состоящая из сторон и диагоналей любого (выпуклого или невыпуклого) четырехугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования (рис. 240, *а*, *б*, *в*). (На этих рисунках невидимые ребра изображены штриховыми линиями.)

Постройте самостоятельно параллелепипед, призму, пирамиду

Практическая работа № 20

Тема: Решение задач по теме «Многогранники»

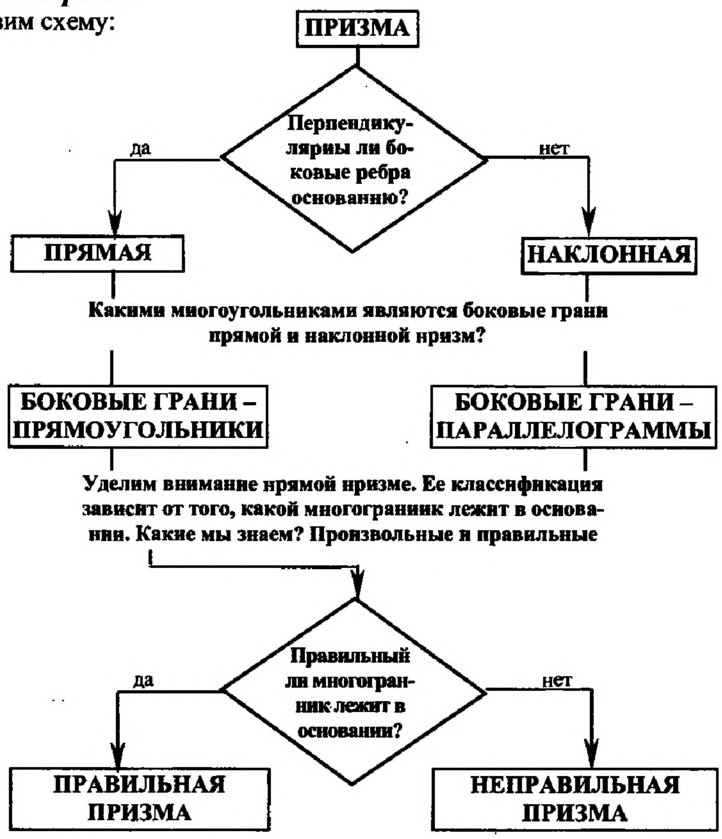
Цель: Научиться решать задачи по теме: «Многогранники»

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

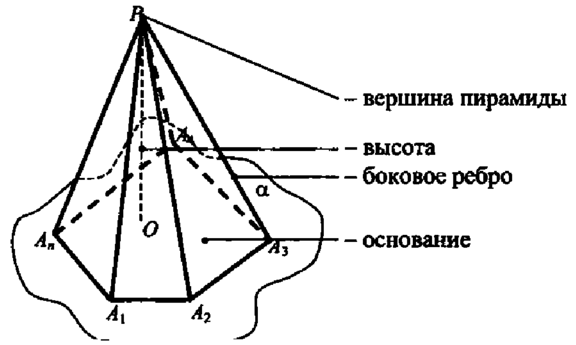
Теоретический материал

Составим схему:



Правильная призма	$S_{бок.}$	$S_{осн.}$	$S_{полн.}$
Треугольная призма	$3ah$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$a(3h + a\sqrt{3})$
Четырехугольная призма	$4ah$	a^2	$2a(h + a)$
Шестиугольная призма	$6ah$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	$3a(2h + \sqrt{3}\,a)$

Пирамида



$$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}.$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot PN.$$

$S_{бок.} = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2) \cdot h$, где p_1 и p_2 периметры оснований, h – апофема.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему

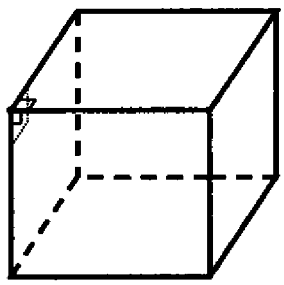
Ход работы

Прочитайте стр 60-65 учебника Геометрия 10-11 кл. А.С. Атанасян

Ответе письменно на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1) Объясните, что такое: а) многогранник; б) поверхность многогранника.
2) Какой многогранник называется выпуклым?
3) Дан куб – выпуклый многогранник (проверьте). Как, имея пилу, получить из деревянного куба модель невыпуклого многогранника?



4) Дан выпуклый многогранник. Что называют а) его гранью; б) его ребром; в) его вершиной?
5) Назовите известные вам многогранники.
   а) Выпуклым или не выпуклым является каждый из них? б) Сколько граней, ребер и вершин у каждого?

6) Дан квадрат. На нем как на основании построены куб и пирамида. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике? Является ли он выпуклым?
   В = 9; Г = 9; Р = 16; 9 – 16 + 9 = 2. Да.
7) Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от нее. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике? Является ли он выпуклым?
   В = 5; Г = 6; Р = 9; 5 – 9 + 6 = 2. Да.
8) Сколько трехгранных, двугранных и плоских углов: а) у тетраэдра; б) у параллелепипеда;

Прочитайте теоретический материал
Выполните задания, самостоятельно выбрав для себя уровень сложности

I уровень

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90°$); $AC = 4$; $BC = 3$. Через сторону AC и вершину B_1 проведена плоскость. $\angle B_1AC = 60°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

II уровень

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$). Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, $\angle BA_1C = 30°$, $A_1B = 10$; $AC = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

I уровень

Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

II уровень

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

Практическая работа № 21

Тема: Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников

Цель: Научиться строить сечения многогранников

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

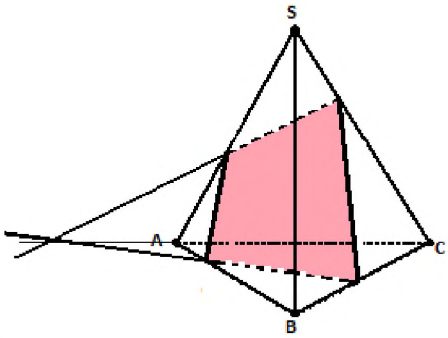
Теоретический материал

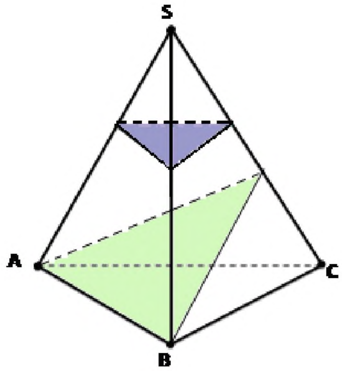
*<u>Опр.</u>*Секущей плоскостью называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам.

*<u>Опр.</u>*Многогранник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.. Так как*тетраэдр* имеет 4 грани, то его

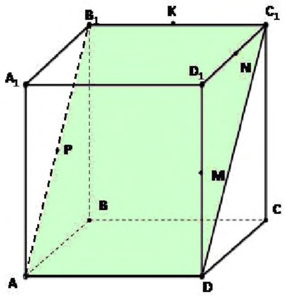
сечениямимогут быть только треугольники могут быть только треугольники

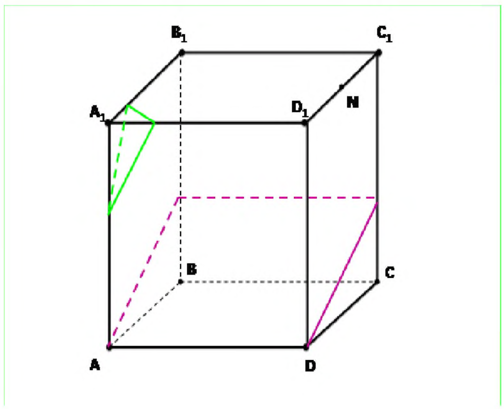


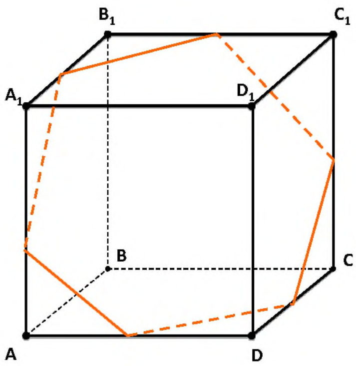


и

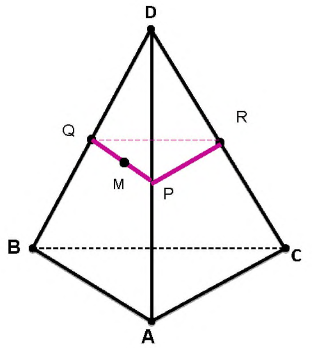
Параллелепипед имеет 6 граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники.
При построении сечений параллелепипеда следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны.







Задача
Точка M лежит на боковой грани ADB. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельно основанию ABC.
Решение



α - секущая плоскость.

$$\alpha \cap (ABD) = QP, QP \,||\, AB$$

$$\text{т.к.} \quad \alpha \,||\, (ABC) \Rightarrow \alpha \,||\, AB, \alpha \,||\, BC, \alpha \,||\, CA \quad \alpha \cap (BDC) = QR, QR \,||\, BC$$

$$\alpha \cap (ADC) = PR, \; PR \,||\, AC$$

Отсюда вытекает следующий *способ построения искомого сечения*. Проведём через точку М прямую, параллельную отрезку АВ, и обозначим буквами Р и Q точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрами DA и DB. Затем через точку Р проведём прямую, параллельную отрезку АС, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR – искомое сечение.

Ход работы:

Прочитать теоретический материал, построить сечения в тетради

Выполнить задания по вариантам

вариант.

1) Дан тетраэдр DABC. Точка М – середина ребра AD. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через т.М и параллельно грани АВС. Найти периметр сечения, если ребро тетраэдра равно ***a***.

2) Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью ABC_1. Докажите, что построенное сечение является параллелограммом.

3) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение плоскостью ACD_1 и найдите периметр сечения, если ребро куба равно ***a***.

2 вариант.

1) Дан тетраэдр DABC. Точка М – середина ребра АВ. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через т.М и параллельно грани DBC. Найти периметр сечения, если ребро тетраэдра равно ***a***.

2) Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью ACC_1. Докажите, что построенное сечение является параллелограммом.

3) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка К – середина ребра B_1C_1 Постройте сечение плоскостью, проходящей через точки А, В, К и найдите периметр сечения, если ребро куба равно ***a***.

Практическая работа № 22

Тема: Площадь поверхности. Вычисление площадей

Цель: Научиться решать задачи на хождение площадей поверхностей многогранников

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Ход работы

Прочитайте теоретический материал п.р № 75-76

Решите задачи, выберите уровень сложности

I уровень

Вариант I

1) **Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. *Найдите* площадь боковой поверхности призмы, если ее наибольшая боковая грань – квадрат.**
2) **Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4 см и образует с плоскостью основания пирамиды угол 45°.**
   а) ***Найдите* высоту пирамиды.**
   б) ***Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.**

Вариант II

1) **Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см и катетом 12 см. *Найдите* площадь боковой поверхности призмы, если ее наименьшая боковая грань – квадрат.**
2) **Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{6}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.**
   а) ***Найдите* боковое ребро пирамиды.**
   б) ***Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.**

II уровень

Вариант I

1) **Основание прямого параллелепипеда – ромб с диагоналями 10 и 24 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. *Найдите* площадь полной поверхности параллелепипеда.**
2) **Основание пирамиды – правильный треугольник с площадью $9\sqrt{3}$ см^2. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья – наклонена к ней под углом 30°.**
   а) ***Найдите* длины боковых ребер пирамиды.**
   б) ***Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.**

Вариант II

1) **Основание прямого параллелепипеда – ромб с меньшей диагональю 12 см. Большая диагональ параллелепипеда равна 16 $\sqrt{2}$ см и образует с боковым ребром угол 45°. *Найдите* площадь полной поверхности параллелепипеда.**
2) **Основание пирамиды – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 4 $\sqrt{2}$ см. Боковые грани, содержащие катеты треугольника, перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом 45°.**
   а) ***Найдите* длины боковых ребер пирамиды.**
   б) ***Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.**

Практическая работа № 23

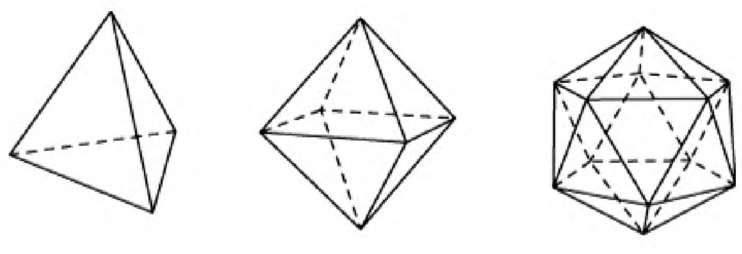
Тема: Представление о правильных многогранниках

Цель: познакомиться с определением правильных многогранников. Научиться строить правильные многогранники.

***Сведения из теории*:**

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. слева). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также *правильным тетраэдром*, или просто *тетраэдром*, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.



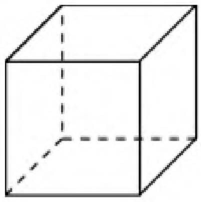
Правильные многогранники

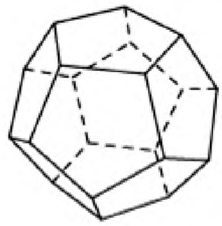
Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке посередине. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром*.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром*.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника, не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. слева), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром*.





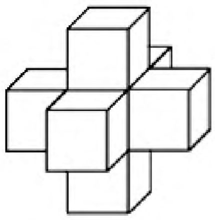
Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром*.

Задания для самостоятельного решения:

1) Чему равны плоские углы додекаэдра?

2) Представьте многогранник – бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли он правильным многогранником?

3) Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов – рис. 60) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин B и ребер P?



4) Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами.

5) Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение правильного многогранника.
2. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Практическая работа № 24

Тема: Виды симметрий в пространстве. Симметрия тел вращения и многогранников

Цель: Применение знаний при решении задач.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник,

Теоретический материал

<u>Опр. (центральная симметрия)</u>

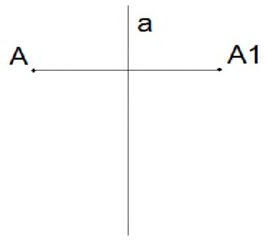
Точки М и $М_1$ называются симметричными относительно т О (центр симметрии), если О – середина отрезка $ММ_1$. Точка О считается симметричной самой себе.

т. М и т.$М_1$ симметричны относительно т.О.
т. О – центр симметрии
т.О – середина отрезка $ММ_1$

т.О отображается сама на себя

<u>Опр. (осевая симметрия)</u>

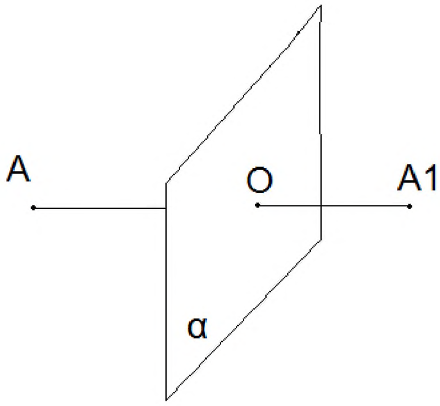
Точки А и $А_1$ называются симметричными относительно прямой *а* (ось симметрии), если прямая *а* проходит через середину отрезка $АА_1$ и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой*а* считается



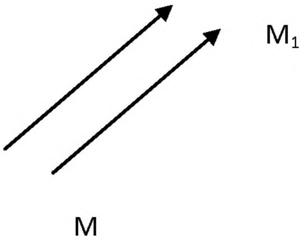
симметричной самой себе.

<u>Опр. (зеркальная симметрия)</u>

Точки $АА_1$ называются симметричными относительно плоскости α(плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка $АА_1$ и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости считается симметричной самой себе.



Опр .Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{p}$ называется отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в точку M_1 , что $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{p}$



В геометрии фигура может иметь один или несколько центров симметрии (осей). Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани-равные правильные многогранники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Примером правильного многогранника является куб.

Докажем, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще при $n \geq 6$.

При $n \geq 6$ угол каждого многоугольника больше или равен 120°. С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трёх плоских углов. Но $120° \cdot 3 = 360°$.

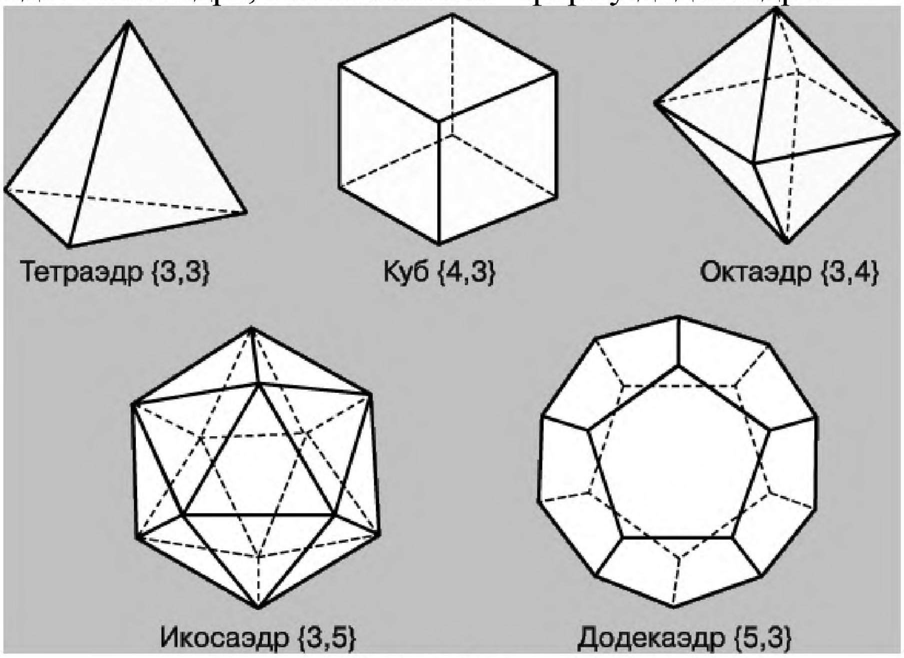
По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной 3, 4, 5 правильных треугольников, 3 квадратов или 3 правильных пятиугольников. Значит, есть только 5 правильных многогранников. Приложение 7.

Тетраэдр – четырёхгранник.
Гексаэдр – шестигранник (куб).
Октаэдр – восьмигранник.
Икосаэдр – двадцатигранник.
Додекаэдр - двенадцатигранник.

Правильные многогранники с древних времён привлекли к себе внимание учёных, архитекторов, художников.

Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон. Поэтому их называют телами Платона.

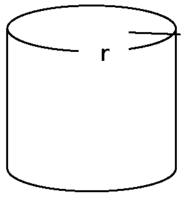
Правильным многогранникам посвящена 13 книга «Начал» Евклида. Платон считал, что атомы огня имеют форму тетраэдра, земли- гексаэдра, воздуха- октаэдра, воды- икосаэдра, вся вселенная – форму додекаэдра.



Ход работы

Прочитайте теоретический материал
Ответите письменно на вопросы:
Какие виды симметрии вам знакомы из планиметрии?
Какие свойства симметрии вы знаете?
Какие многоугольники имеют: 1) Центр симметрии;
Ось симметрии?
Какие многогранники имеют симметрию? Перечислить.
Допишите пропущенные слова вместо …… .
5. Многогранник, у которого …… правильные …… называется правильным.
6. Куб – правильный многогранник, у которого ….. квадрат.
7. Тетраэдр – правильный …… , у которого грани - …… .
3. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните:

Практическая работа №25
Тема: Решение задач по теме «Тела вращения». Площадь поверхности. Вычисление площадей поверхностей
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник,
Теоретический материал



Цилиндр

h – высота цилиндра, r – радиус основания

$S_{бок.} = 2\pi R\text{h}$, $S_{полн.} = 2\pi R^2 + 2\pi R\text{h}$, $S_{полн.} = 2\pi R(R + \text{h})$, где

R – радиус основания цилиндра;

З h – высота цилиндра. **адача**

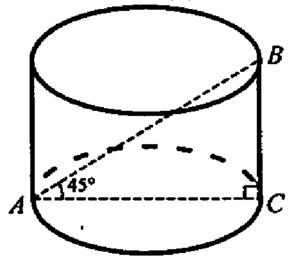
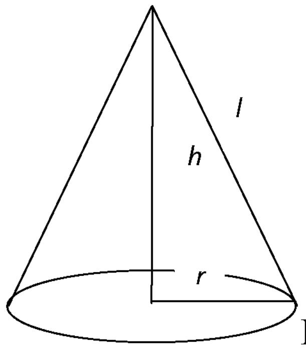


Рис. 1

Решение:

1. ΔABC – прямоугольный.
2. Так как $\angle BAC = 45°$, то ΔABC – равнобедренный, значит, $AC = BC = 5$.
3. Так как $AC = 5$, AC – диаметр, то $R = 2{,}5$.
4. $S_{полн.} = 2\pi R(H + R)$, где $H = 5$, $S_{полн.} = 2\pi \cdot 2{,}5$ $(5 + 2{,}5) = 5\pi \cdot 7{,}5 = 37{,}5\pi$.

Ответ: $37{,}5\pi$.



Конус

h– высота конуса, r - радиус основания, l - образующая конуса.

Итак, *площадь боковой поверхности конуса* равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

3) ***Площадью полной поверхности конуса*** **называется сумма площадей боковой поверхности и основания.**

$$S_{бок.} = \pi rl \qquad S_{полн.} = \pi r(l + r).$$

Задача № 563. *Дано*: конус, $OP = 1{,}2$ см, $S_{осев.} = 0{,}6$ см^2 (рис. 8).

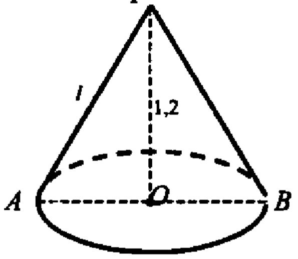


Рис. 8

Найти: $S_{полн.}$

Решение:

1) Осевое сечение – треугольник: высота 1,2 см и основание $2r$. $S_{осев.} = \frac{1}{2} \cdot 2rH$;

$S_{осев.} = rH$; $r = \frac{S}{H}$; $r = \frac{0{,}6}{1{,}2} = 0{,}5$; $r = 0{,}5$ см.

2) Из ΔAOP по теореме Пифагора $l = AP = \sqrt{OP^2 + OA^2}$; $l = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}44 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$;

$L = 1.3$ см.

3) $S_{\text{полн.}} = \pi r\,(r + l)$; $S_{\text{полн.}} = \pi 0{,}5\,(0{,}5 + 1{,}3) = \pi \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8 = 0{,}9\pi$.

(*Ответ*: 0.9π см^2.)

Полная поверхность усеченного конуса $S_{\text{п.}} = \pi \cdot (lR + lR_1 + R^2 + R_1^2)$.

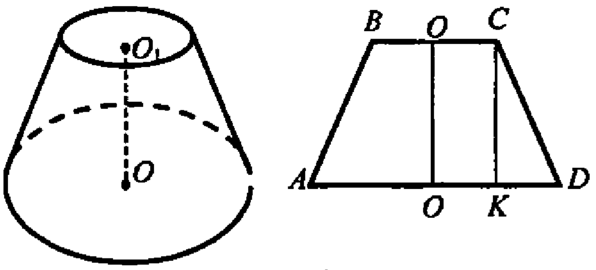


Рис. 2

Дано: усеченный конус, $OD = 7$ см, $CD = 5$ см, $OO_1 = 4$ см (рис. 2).

Найти: $S_{\text{сеч.}}$, $S_{\text{бок.}}$

Решение: Осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция. $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot OO_1$. $S_{\text{бок.}} = \pi(O_1C + OD) \cdot CD$. ΔCKD – прямоугольный, по теореме Пифагора $KD = \sqrt{CD^2 - KC^2}$ $KC = OO_1 = 4$ (см) $KD = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ (см) $O_1C = OD - KD = 7 - 3 = 4$ (см), $BC = 2O_1C = 8$ (см); $AD = 2OD = 14$ (см). $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{8+14}{2} \cdot 4 = 22 \cdot 2 = 44$ (см^2). $S_{\text{бок.}} = \pi(4 + 7) \cdot 5 = 55\pi$ (см^2). (*Ответ*: $S_{\text{сеч.}} =$ 44 см^2, $S_{\text{бок.}} = 55\pi$ см^2.)

Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки.

Дайте определение сферы.

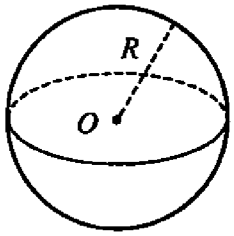


Рис. 7

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Данная точка O называется центром сферы, а данное расстояние – радиусом сферы. Обозначается R. Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы. Диаметр сферы равен $2R$. Вспомните определение круга.

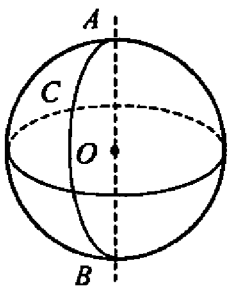


Рис. 8

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.

Дайте определение шара:

Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Существует и другое определение шара:

Шаром радиуса R с центром в точке O называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая O), и не содержит других точек.

в прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $C(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

Задача № 580. *Дано*: шар. $R = 41$ дм. $d = 9$ дм (рис. 5).

Найти: $S_{сеч.}$

Решение: $d < R$, значит, сечением шара плоскостью является круг. $S_{сеч.} = \pi r^2$. ΔAOK – прямоугольный, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм). $S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм^2). (*Ответ*: 1600π дм^2.)

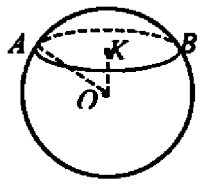


Рис. 5

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Посмотрите задачи, проанализируйте и запишите в тетрадь

Выполните разноуровневые задания, самостоятельно выбрав вариант сложности

Вариант 1

I уровень

Сечение шара площадью $S = 16\pi$ см^2 находится на расстоянии 3 см от центра шара.

Найдите площадь его поверхности.

II уровень

К сфере с $S = 64\pi$ см^2 проведена касательная плоскость. Кротчайшее расстояние от точки A, лежащей в этой плоскости, до данной сферы равно 1 см.

Найти расстояние от точки A до точки касания сферы с плоскостью

III уровень

Два взаимно перпендикулярных сечения сферы равноудалены от ее центра. При этом центр сферы находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от общей хорды этих сечений, равной 6 см.

Найдите площадь сферы.

Практическая работа № 26

Тема: Площадь поверхности. Вычисление площадей и объемов

Цель: Применение знаний при решении задач.

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Ход работы

Повторить теоретический материал

Найдите соответствующую формулу, указав путь стрелкой:

πD	$S_{\text{б.п.к.}}$
$\pi R(1 + r)$	$S_{\text{п.п.к.}}$
$2\pi RH + 2\pi R^2$	$S_{\text{б.п.ц.}}$
πD_1	$S_{\text{п.п.к.}}$
$2\pi r$	$S_{\text{б.п.к.}}$
$2\pi RH$	$S_{\text{б.п.ц.}}$
$\pi R(1 + r)$	$S_{\text{п.п.ц.}}$
$\pi R(H + r)$	
πr_1	

Выполните задания самостоятельно выбрав уровень сложности (карточка 1-вариант 1, карточка 2 – вариант 2)

I уровень

Карточка № 1

1. Призма. Площадь боковой поверхности прямой призмы.
2. Основания прямой призмы – ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Пирамида. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды.
2. Основание прямой призмы – ромб с острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности – 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 см, а высота $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

II уровень

Карточка № 1

1. Правильные многогранники.
2. Основание прямого параллелепипеда – ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений P и Q.
3. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетом $4\sqrt{3}$ см и противолежащим углом 60°. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь

наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды.
2. Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы имеет площадь Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
3. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Высота пирамиды равна 4 см и образует со всеми боковыми ребрами углы 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

III уровень

Карточка № 1

1. Призма. Площадь боковой поверхности прямой призмы.
2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Диагональ боковой грани A_1C составляет с плоскостью грани CC_1B_1B угол 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Пирамида. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды.
2. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 17$, $DC = 28$, $AC = 39$. Диагональ боковой грани A_1D составляет с плоскостью боковой грани DD_1C_1C угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна m. Угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Практическая работа № 27

Тема: Решение задач на вычисление объемов многогранников и тел вращения

Цель: Научиться решать задачи на вычисление объемов многогранников и тел вращения

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Теоретический материал

Объем прямоугольного параллелепипеда. Итак $V = abc$.

Задача № 649 б).

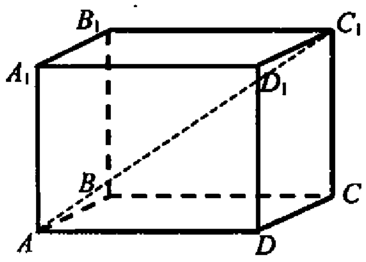


Рис. 1

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AC_1 = 3\sqrt{2}$ (рис. 1).

Найти: V.

Решение: Пусть ребро куба равно a, тогда $AC_1^2 = 3a^2$, $a = \frac{AC_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. $V = (\sqrt{6})3 =$ $= 6\sqrt{6}$ (см^3). (*Ответ*: $6\sqrt{6}$ см^3.)

Объем прямой призмы $V = S_o \cdot h.$

2. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма $\angle ACB = 90°$, $\angle CNB = 90°$, $NB = 2$, $\angle AN = 8$, $\angle C_1NC = 30°$ (рис. 4).

Найти: V.

$V = S_O \cdot h.$

$V = \frac{1}{2} CN \cdot BA \cdot CC_1$, $CN \perp BA$. $CN^2 = BN \cdot NA.$

$CC_1 = \text{tg}30° \cdot CN.$ $V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}.$

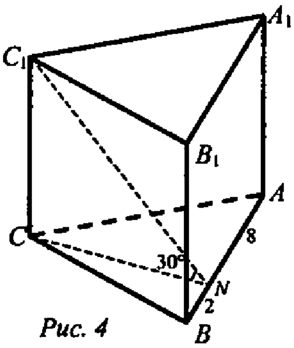


Рис. 4

Объем цилиндра $V_{цил.} = \pi r^2 h = S_{осн.} \cdot h.$

Задача № 669. *Дано*: цилиндр, $S_{осн.} = Q$, $S_{сеч.} = S$ (рис. 1).

Найти: V.

Решение: $V = S_{осн.} \cdot h$, $S_{осн.} = \pi r^2$, $r = \sqrt{\frac{S_{осн.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$, $r = AO$. $S_{сеч.} = AD \cdot DC$, $AD = 2r$,

$DC = h$, т.е. $S_{сеч.} = 2r \cdot h$, $h = \frac{S}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}$, $h = \frac{S\sqrt{Q\pi}}{2Q}$,

$V = Q \cdot \frac{S\sqrt{Q\pi}}{2Q} = \frac{1}{2} S\sqrt{Q\pi}$. (*Ответ*: $\frac{1}{2} S\sqrt{Q\pi}$.)

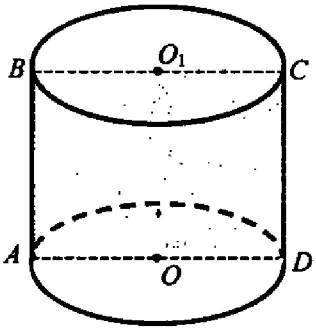
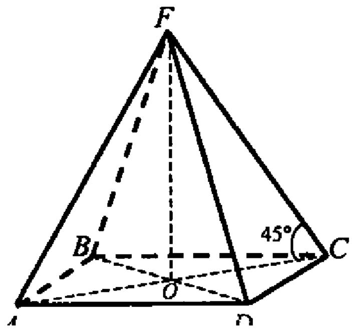


Рис. 1

Объем пирамиды V= $\frac{1}{3} Sh.$



2. *Дано*: $ABCDF$ – правильная пирамида. $\angle FCO = 45°$; $FO = 2$ (рис. 4).

Найти: а) $S_{\text{осн.}}$; б) V.

Решение:

1) Рассмотрим ΔFOC: $\angle O = 90°$, $\angle C = 45°$, значит, $\angle F = 45°$. Следовательно, ΔFOC – равнобедренный, $OC = FO = 2$.

$AD = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

3) $ABCD$ – квадрат (пирамида правильная). $S_{\text{осн.}} = AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

4) $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$. $V = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \dfrac{16}{3} = 5\dfrac{1}{3}$.

Объем усеченной пирамиды $V = \dfrac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S_1 S})$.

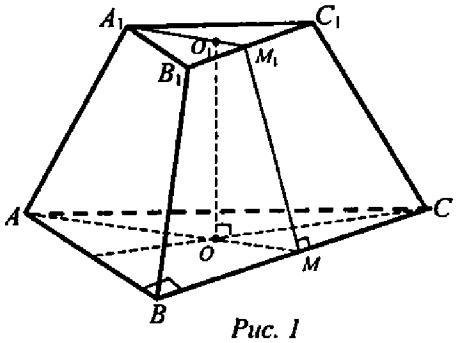


Рис. 1

Задача № 697. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная усеченная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = 0{,}5a$. $MM_1 \perp BC$, $MM_1 = a$ (рис. 1).

Найти: $V_{\text{ус.пир.}}$ – ?

Решение:

1) Рассмотрим ΔABC, найдем AM ($AM \perp BC$). $AM = h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

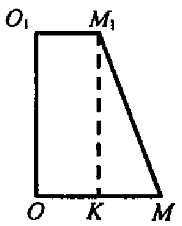


Рис. 1 а)

2) $\Delta A_1B_1C_1$, найдем A_1M_1 ($A_1M_1 \perp B_1C_1$).

$A_1M_1 = h_1 = \dfrac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;

3) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$;

4) Рассмотрим прямоугольную трапецию OO_1M_1M (рис 1 *а*)): $OM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. $O_1M_1 = \dfrac{1}{3}A_1M_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$;

$M_1K \perp OM$; $O_1M_1 = OK$. $KM = OM - O_1M_1$. $KM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} - \dfrac{a\sqrt{3}}{12} = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$;

Из ΔKM_1M: $\angle K = 90°$, по теореме Пифагора. $M_1K = \sqrt{MM_1^2 - KM^2}$

$= \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2 \cdot 3}{144}} = \dfrac{a}{12}\sqrt{141}.$

5) $V_{\text{ус.пир}} = \dfrac{1}{3}h(S_1 + S_1 + \sqrt{SS_1})$.

$$V_{\text{ус.пир}}=\frac{1}{3}\frac{a}{12}\sqrt{141}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}+\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{7\sqrt{47}a^3}{192};$$

(*Ответ*: $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$.)

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Объем конуса

Задача № 704. *Дано*: конус, $h = SO = AB = H$ (рис. 2).

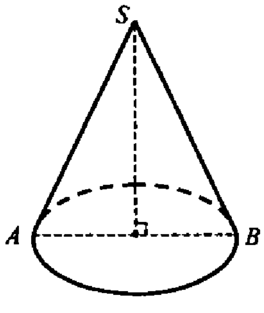


Рис. 2

Найти: V.

Решение: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. $d = AB = H$, $D = 2r$,

$$r=\frac{d}{2}=\frac{H}{2},\ h=H.\ V=\frac{1}{3}\pi\frac{H^2}{4}\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{H^3}{4}=\frac{\pi H^3}{12}.$$

(*Ответ*: $V=\frac{\pi H^3}{12}$.)

Ход работы:

Прочитайте теоретический материал

Внимательно посмотрите на решение задач, на нахождение объемов,

Решите задание по вариантам

Вариант 1

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60°. *Найдите* объем пирамиды.
2. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30°. Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в 45°. *Найдите* объем цилиндра.

Вариант 2

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол в 60°. *Найдите* объем пирамиды.
2. В конус вписана пирамида. Основанием служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30°. Боковая грань пирамиды, проходящая через данный катет, составляет с плоскостью основания угол в 45°. *Найдите* объем конуса.

Вариант 3

1. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объем призмы равен 108 см^3. *Найдите* площадь полной поверхности призмы.
2. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. *Найдите* объем цилиндра.

Практическая работа № 33

Тема: Вычисление площадей и объемов
Цель: Научиться решать задачи на вычисление площадей и объемов
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник,

Ход работы

Повторите теоретический материал

Выполните задания

Уровень А.

Выполните тест, записав только ответ «букву»

1.Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса, на плоскость основания называется:
А) образующей Б) высотой В) диагональю Г) диаметром

2. Гранью куба является: А) ромб Б) прямоугольник В) квадрат Г) параллелограмм

3.Сечение конуса, параллельной плоскости основания будет
А) круг Б) прямоугольный треугольник В) равнобедренный треугольник

4. Прямая призма, в основании которой лежит параллелограмм называется:
А) куб Б) квадрат В) параллелепипедом Г) ромбом

Тело, состоящее из двух кругов, совмещенных параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов называется
А)цилиндром Б) конусом В) шаром Г) сферой

Объём усеченной призмы равенА) $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ Б) $V = S_{осн} H$ В) V=abc Г) $V = \pi R^2 H$

Объём наклонной призмы равен:А) V=abc Б) нет верного ответа В)V=SH Г) V=a^3

Объём шара выражается формулой:А) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Б) $V = \frac{3}{4}\pi R^3$ В) $V = \frac{4}{3}\pi R^2$ Г) $V = \frac{4}{3}\pi R$

9. Объём конуса можно вычислить по формуле:А) $V = \frac{1}{3} S$ Б) $V = \frac{1}{3} SH$ В) $V = \frac{1}{3} H$ Г) $V = SH$

10. Объём цилиндра вычисляется с помощью формулы:
А) V=abc Б) $V = \pi R^2 H$ В) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ Г) $V = \pi RH$

Прямая призма, в основании которой правильный многоугольник называется :А) многогранником Б) параллелепипедом В) правильной Г) додекаэдром

Тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного от данной точки, называется:
А) сфера Б) шар В) окружность Г) эллипс

Отрезок, соединяющий вершину конуса с точками окружности основания, называется:

А) касательной Б) диаметром В) высотой Г) образующей
Границей шара является :А) сфера Б) круг В) радиус Г) овал
Тело, состоящее из круга и точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих эту точку с точками круга, называется:
А) цилиндром Б) усечённым конусом В) конусом Г) шаром
Объём усечённого конуса выражается формулой:
А) $V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$ Б) $V = S_{осн}H$ В) $V = \frac{1}{3}SH$ Г) V=abc
Объём параллелепипеда можно найти по формуле:А) V=ab Б) V=ac В) V=bc Г) V=abc
Объём прямой призмы равен
А) $V = S_{осн}H$ Б) $V = \frac{1}{3}S_{осн}H$ В) $V = \pi R^2 H$ Г) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
18.Объём куба можно вычислить по формуле:А) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Б) $V = \frac{1}{3}SH$ В) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ Г) $V=a^3$
19. Объём пирамиды вычисляется с помощью формулы:
А) $V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$ Б) $V = S_{осн}H$ В) V=abc Г) $V = \pi R^2 H$

Уровень Б

Выполните тест, в ответе укажите только ответ «букву»

1. *Сколько* диагоналей у восьмиугольной усеченной пирамиды. а) 20; б) 28; в) 40; г) другой ответ.
2. Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна $27\sqrt{3}$ см^2, а полная поверхность – $36\sqrt{3}$ см^2. *Найдите* высоту тризмы. а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см;в) 3 см; г) другой ответ.
3. *Найдите* площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям, равным 4 см, 4 см, 6 см. а) 92 см^2; б) 128 см^2; в) 96 см^2; г) другой ответ.
4. *Найдите* площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребра AB и C_1D_1, если ребро куба равно 3 см. а) 6 см^2; б) $5\sqrt{2}$ см^2; в) $9\sqrt{2}$ см^2; г) другой ответ.
5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см, а сторона основания – 4 см. *Найдите* боковое ребро. а) $2\sqrt{3}$ см; б) $\sqrt{10}$ см; в) 3 см; г) другой ответ.
6. *Найдите* боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна $2\sqrt{2}$ см, а все двугранные углы при основании – 45°. а) $8\sqrt{2}$ см^2; б) $16\sqrt{2}$ см^2; в) 8 см^2; г) другой ответ.

7. **Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{12}$ см, а стороны основания 3 см и 7 см. *Найдите* площадь диагонального сечения.**

   а) $10\sqrt{6}$ см^2; б) 20 см^2; в) 12 см^2; г) другой ответ.

Решите задачу

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а боковое ребро – 10 см. *Найдите*: 1) высоту пирамиды; 2) угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; 3) угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды; 4) площадь боковой поверхности пирамиды; 5) площадь полной поверхности пирамиды; 6) объем пирамиды.

Практическая работа №29

Тема: Решение задач на составление уравнений прямой, плоскости, окружности, сферы

Цели: Закрепить навыки составления уравнений прямой, плоскости, окружности, сферы

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Теоретический материал

Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору:

Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1; p_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

Иногда его называют *каноническим уравнением прямой.*

Общее уравнение плоскости:

Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

Уравнение плоскости по трём точкам:

Любые ли три точки пространства задают плоскость? Нет. Во-первых, точки должны быть различными. А во-вторых, они не должны лежать на одной прямой (сразу все три).

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_0(x_0; y_0; z_0), M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$, которые не лежат на одной прямой, можно составить по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение поверхности сферы:

Сфера радиуса R с центром в начале координат представлена уравнением второй степени.
$x^2+y^2+z^2=R^2$ (R – радиус сферы)

Сфера радиуса R центр которой не совпадает с началом координат представлена другим уравнением второй степени.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

(R - радиус сферы; a, b, c - смещение центра сферы относительно центра координат)

Ход работы

Прочитать теоретический материал
Посмотреть примеры
Решить задания по образцу

Пример: Найти уравнение прямой, проходящей через две точки: (-1, 2) и (2, 1)

Решение.

По уравнению $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

полагая в нем $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$ (без разницы, какую точку считать первой, какую - второй), получим

$\dfrac{y-2}{1-2}=\dfrac{x+1}{2+1}$, или $\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x+1}{3}$; после упрощений получаем окончательно искомое уравнение в виде $x + 3y - 5 = 0$.

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; —3; 5) и радиусом, равным 6.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 =100$.

Задача 4. Доказать, что уравнение
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$
является уравнением сферы.

Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1; -2; 0), M_1(2; 0; -1), M_2(0; -1; 2)$.
$5x-y+3z-7=0$

Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2; 1)$
$x-2y+3=0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0; -3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-7; 5)$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0; 3)$ и направляющему вектору $\bar{j}(0; 1)$.

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right), B(-1;7)$.
$AB: 28x+15y-77=0$

Ответы (один из вариантов решений):

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.

Решение: Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; —3; 5) и радиусом, равным 6.

Решение: Подставив значение координат точки С и значение радиуса в уравнение
$(x — a)^2 + (y — b)^2 + (z — c)^2 = R^2$ получим
$(x — 2)^2 + (y + 3)^2 + (z — 5)^2 = 36$.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y — 3)^2 + z^2 =100$.

Решение: Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы
$(x — a)^2 + (y — b)^2 + (z — c)^2 = R^2$ видим, что
$a = — 4$, $b = 3$, $c = 0$, R =10. Следовательно, С(—4; 3; 0), R = 10.

Задача 4. Доказать, что уравнение
$x^2 + y^2 + z^2 — 2x + 4y — 6z + 5 = 0$
является уравнением сферы.

Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно x, y и z:
$x^2 — 2x + y^2 + 4y + z^2 — 6z + 5 =$
$= (x — 1)^2 — 1 + (y + 2)^2 — 4 + (z — 3)^2 — 9 + 5 =$
$= (x — 1)^2 + (y + 2)^2 + (z — 3)^2 — 9$.

Следовательно, данная поверхность имеет уравнение
$(x — 1)^2 + (y + 2)^2 + (z — 3)^2 = 9$.

Это уравнение представляет собой уравнение сферы с центром в точке С(1; —2; 3) и радиусом R = 3

Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1;-2;0), M_1(2;0;-1), M_2(0;-1;2)$.

Решение: составим уравнение плоскости по трём точкам. Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 0-1 \\ y-(-2) & 0-(-2) & -1-(-2) \\ z-0 & -1-0 & 2-0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

Вот теперь и аналитически видно, что всё дело свелось к координатам двух векторов. Раскрываем определитель по первому столбцу, находим уравнение плоскости:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-(y+2)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$(4+1)(x-1)-(2-1)(y+2)+(1+2)z=0$$

$$5(x-1)-(y+2)+3z=0$$

$$5x-5-y-2+3z=0$$

$$5x-y+3z-7=0$$

Больше ничего упростить нельзя, записываем:

Ответ: $5x-y+3z-7=0$

Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1;2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2;1)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$. В данном случае:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:

$$1\cdot(x-1)=2\cdot(y-2)$$

И приводим уравнение к общему виду:

$$x-1=2y-4$$

$$x-2y+3=0$$

Ответ: $x-2y+3=0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0;-3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-7;5)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$$

$$\frac{x-0}{-7}=\frac{y-(-3)}{5}$$

$$5x=-7(y+3)$$

$$5x=-7y-21$$

$$5x+7y+21=0$$

Ответ: $5x+7y+21=0$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0;3)$ и направляющему вектору $\bar{j}(0;1)$.

Решение: Используем формулу:

$$p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$$

$$1\cdot(x-0)=0\cdot(y-1)$$

$$x=0$$

Ответ: $x=0$ *(ось ординат)*

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right), B(-1;7)$.

Решение: Используем формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1-\frac{3}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{7-\frac{7}{3}}$$

Выполняем действия в знаменателях:

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{14}{3}}$$

Применяем метод пропорции:

$$\frac{14}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

Именно сейчас удобно избавиться от дробных чисел. В данном случае нужно умножить обе части на 6:

$$6\cdot\frac{14}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{2}\cdot 6\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

$$28\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-15\cdot\left(y-\frac{7}{3}\right)$$

Раскрываем скобки и решаем уравнение:

$$28x-42=-15y+35$$

$$28x-42+15y-35=0$$

Ответ: $AB: 28x+15y-77=0$

Практическая работа №30

Тема: Решение задач на действия с векторами.

Цель: Овладеть навыками использования правил действий над векторами

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Теоретический материал

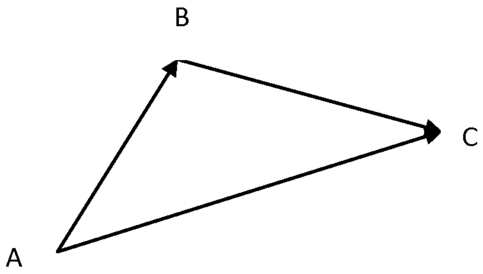
Основные определения, обозначения векторов, действия над векторами в пространстве аналогичны основным характеристикам вектора в пространстве.

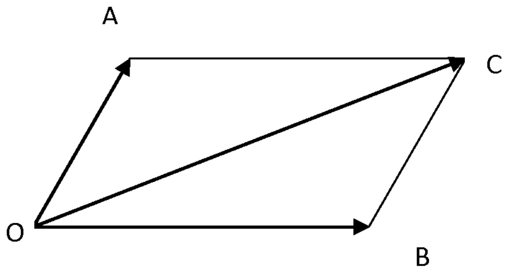
<u>Действия над векторами</u>

<u>Сложение векторов.</u>

Правило треугольника Правило параллелограмма

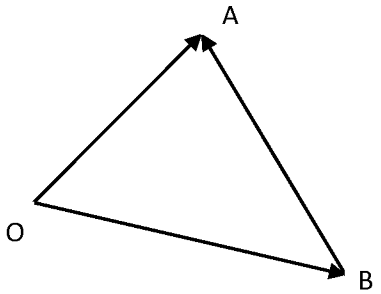
$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ $\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OC}$





<u>Вычитание векторов</u>

$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$



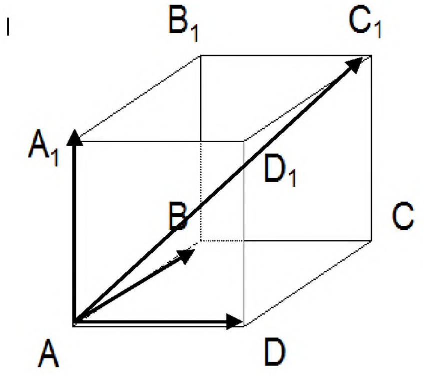
<u>Умножение вектора на число:</u>

<u>Опр.</u>

Произведением ненулевого вектора а на число k называется такой вектор $\vec{в}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ сонаправлены при k > 0 и противоположно направлены при k < 0

$\vec{a}$ $\quad 3\vec{a}$ $\quad \vec{a}$ $\quad -2\vec{a}$

Для сложении *<u>некомпланарных векторов</u>* применяют *<u>правило параллелепипеда</u>*



$$\vec{AA_1} + \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC_1}$$

Ход работы

Прочитать теоретический материал

Выполните задание по вариантам

1 вариант

→ →

1) Нарисуйте параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, обозначьте вектор СД и ВС соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$. *а)* Изобразите на рисунке векторы $\vec{a}+\vec{в}$, $\vec{a}-\vec{в}$, $2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{в}$

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$

в) Разложите вектор $\vec{BD_1}$ по векторам $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{BB_1}$

2 вариант

→ →

1) Нарисуйте параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, обозначьте вектор СД и АД соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$. *а)* Изобразите на рисунке векторы $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{c}$

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\vec{DA}+\vec{DC}+\vec{DD_1}$

в) Разложите вектор $\vec{B_1D_1}$ по векторам $\vec{A_1A}$, $\vec{A_1B}$, $\vec{A_1D_1}$

Практическая работа № 31

Тема: Решение задач на нахождения расстояния между точками

Цель: Научиться решать задачи на нахождения расстояния между точками

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Выполните задание по вариантам

Вариант I

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{C_1D_1}$.

а) $\overrightarrow{C_1A_1}$; в) $\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{AC}$; г) правильного ответа нет.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектор $\overrightarrow{MK}$, если M — середина A_1D_1 и K — середина CC_1.

а) $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; в) $\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

3. Даны координаты точек:
$A(-3; 2; -1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(1; -4; 3)$, $D(-1; 2; -2)$.

Найдите $|2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}|$.

а) $\sqrt{433}$; б) $\sqrt{521}$; в) $\sqrt{487}$; г) $\sqrt{395}$.

4. Даны координаты точек:
$C(3; -2; 1)$, $D(-1; 2; 1)$, $M(2; -3; 3)$, $N(-1; 1; -2)$.

Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

а) 0,75; б) 0,6; в) 0,7; г) $\frac{2}{3}$.

5. При каком значении (значениях) k векторы $\vec{a}(6 - k; k; 2)$ и $\vec{b}(-3; 5 + 5k; -9)$ перпендикулярны?

а) 2; б) 3; в) 2; −3,6; г) 3; −2,4.

6. При каком значении a векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $A(-2; -1; 2)$, $B(4; -3; 6)$, $C(-1; a - 1; 1)$, $D(-4; -1; a)$?

а) 1; б) −2; в) 2; г) −1.

7. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Найдите $\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b}$.

а) 0,07; б) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; г) 0,08.

8. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120^\circ$.

а) $3\sqrt{2}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{13}$; г) $2\sqrt{3}$.

Вариант II

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC}$.

а) $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{DB}$; г) $\overrightarrow{C_1B}$.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{l}$.

Выразите через векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{l}$ вектор $\overrightarrow{KP}$, где K — середина CC_1, P — середина AD.

а) $-\frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} - \vec{l}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{l}$;

б) $\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - \vec{l}$; г) $\frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} - \vec{l}$.

3. Даны координаты точек:
$C(-4; -3; -1)$, $D(-1; -2; 3)$, $M(2; -1; -2)$, $N(0; 1; -3)$.
Найдите $|3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{MN}|$.

а) $\sqrt{329}$; б) $\sqrt{413}$; в) $\sqrt{397}$; г) $\sqrt{366}$.

4. Даны координаты точек:
$A(1; -1; -4)$, $B(-3; -1; 0)$, $C(-1; 2; 5)$, $D(2; -3; 1)$.
Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

а) 0,8; б) −0,5; в) −0,7; г) 0,6.

5. При каком значении (значениях) m векторы $\vec{a}(4;\ m - 1;\ m)$ и $\vec{b}(-2;\ 4;\ 3 - m)$ перпендикулярны?

а) 4; б) −3; в) −3; −2; г) 3; 4.

6. При каком значении a векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны, если $C(-3;\ 2;\ 4)$, $D(1;\ -4;\ 2)$, $M(1;\ -2;\ a)$, $N(-1;\ a+3;\ -1)$?

а) -2; б) -3; в) 1; г) -1.

7. Дано: $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$. Найдите $\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{m} + \vec{n}$.

а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{7}}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120^\circ$.

а) $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{31}$; в) $\sqrt{29}$; г) $\sqrt{33}$.

Практическая работа № 32

Тема: Скалярное произведение векторов, решение задач на нахождение векторного уравнения прямой и плоскости

Цель: закрепить умения выполнять действия над векторами

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Теоретический материал

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) \qquad (3)$$

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}\{x_1;y_1\}\ и\ \bar{b}\{x_2;y_2\}$, то скалярное произведение находят так:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 \qquad (4)$$

Пример 4 В равностороннем треугольнике АВС со стороной, равной 4, найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}\ и\ \overline{AC}$.

Решение: так как углы в равностороннем треугольнике по 60^0, то, используя формулу (3), получим $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 4\cdot4\cdot\cos60^0 = 16\cdot\frac{1}{2} = 8.$

Ответ: 8.

Используя формулы (1), (3), (4),можно вывести формулу для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \qquad (5)$$

Пример 5 Найти угол А в треугольнике АВС, если А(6;7), В(3;3), С(1;-5).

Решение: Определим координаты векторов $\overline{AB}\{-3;-4\}, \overline{AC}\{-5;-12\}$. Вычислим косинус угла между векторами по формуле (5):

$$\cos\angle(\overline{AB};\overline{AC}) = \frac{-3\cdot(-5)+(-4)\cdot(-12)}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}} = \frac{63}{5\cdot13} = \frac{63}{65}.$$

$\angle(\overline{AB};\overline{AC}) = \arccos\frac{63}{65}$. *Ответ*: $\arccos\frac{63}{65}$.

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Посмотрите примеры решения, выполните задания по образцу

Задание

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ *и* $\overrightarrow{CD}$

4 Найти $(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}(\overline{BD} + \overline{AC})$

6 Выяснить, коллинеарные ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Исходные данные:

Даны точки $A(6, 3, 3)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(3, 1, 1)$, $D(0, 4, 5)$.

Задание 1

Решение:

$\overrightarrow{AB} = \{-1-6; 0-3; -2-3\} = \{-7; -3; -5\}$;

$\overrightarrow{BC} = \{3+1; 1-0; 1+2\} = \{4; 1; 3\}$;

$\overrightarrow{CD} = \{0-3; 4-1; 5-1\} = \{-3; 3; 4\}$;

$\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CD} = \{-7-3\cdot 4+4\cdot(-3); -3-3\cdot 1+4\cdot 3; -5-3\cdot 3+4\cdot 4\} =$
$\{-31; 6; 2\}$

Задание 2

Решение:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{83}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + (4)^2} = \sqrt{34}$$

Задание 3

Решение:

$$\cos\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC} = \frac{-7\cdot 4 - 3\cdot 1 - 5\cdot 3}{\sqrt{83}\sqrt{26}} = \frac{-46}{\sqrt{2158}};$$

$$\cos\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD} = \frac{4\cdot(-3) + 1\cdot 3 + 3\cdot 4}{\sqrt{26}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{884}}$$

Задание 4

Решение:

Даны точки $A(6,3,3)$, $B(-1,0,-2)$, $C(3,1,1)$, $D(0,4,5)$.

$\overrightarrow{AB}=\{-7;-3;-5\}$; $\overrightarrow{CD}=\{-3;3;4\}$;

$\overrightarrow{AD}=\{0-6;4-3;5-3\}=\{-6;1;2\}$;

$\overline{AB}+\overline{CD}=\{-7+(-3),-3+3,-5+4\}=\{-10,0,-1\}$

$(\overline{AB}+\overline{CD})\cdot\overline{AD}=-10\cdot(-6)+0\cdot1+(-1)\cdot2=58$

Задание 5

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$,

$\overline{BD}=\{0-(-1),4-0,5-(-2)\}=\{1,4,7\}$,

$\overline{AC}=\{3-6,1-3,1-3\}=\{-3,-2,-2\}$,

$\overline{BD}+\overline{AC}=\{1+(-3),4+(-2),7+(-2)\}=\{-2,2,5\}$.

$$Пр_{\overline{AB}}(\overline{BD}+\overline{AC})=\frac{-7\cdot(-2)+(-3)\cdot2+(-5)\cdot5}{\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}}=\frac{-17}{\sqrt{83}}.$$

Задание 6

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$, $\overline{CD}=\{-3,3,4\}$

$\frac{-7}{-3}\neq\frac{-3}{3}\neq\frac{-5}{4}\Rightarrow$ векторы не являются коллинеарными.

Задание 7

Решение:

$\overline{AB}=\{-7,-3,-5\}$, $\overline{CD}=\{-3,3,4\}$

$-7\cdot(-3)+(-3)\cdot3+(-5)\cdot4=-8\neq0$, следовательно, векторы не являются ортогональными.

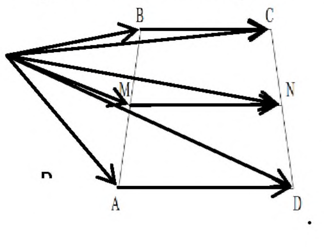
Задания к практической работе.

1 A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)
2 A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)
3 A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)
4 A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)
5 A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)
6 A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)
7 A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)
8 A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)
9 A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)
10 A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)
11 A (1; 0; 1); B (7; 4; 3); C (3; -5; 1); D (-2; 2; 2)
12 A (5; 1; 0); B (-1; -1; -1); C (2; 4; 7); D (1; 0; 1)
13 A (10; 1; 1); B (-2; -1; 1); C (4; 3; 2); D (1; 0; -1)
14 A (2; -7; 4); B (2; -1; 3); C (1; 0; -1); D (2; 1; 3)
15 A (6; 3; 3); B (-1; 0; -2); C (3; 1; 1); D (0; 4; 5)

16 A (3; 2; 0); B (2; -1; 7); C (4; 0; 5); D (1; -2; -1)
17 A (4; -1; 2); B (1; 0; 3); C (-2; 1; 5); D (3; 8; -1)
18 A (1; 1; -3); B (-7; 5; 2); C (2; 1; 0); D (3; -3; 1)
19 A (5; 0; 1); B (2; -1; -1); C (-6; -1; 1); D (3; 1; 3)
20 A (3; 5; 1); B (7; -4; 3); C (2; 1; 1); D (0; -1; 3)
21 A (1; -2; 1); B (-1; 8; -3); C (3; 2; 1); D (5; 3; 1)
22 A (-3; -1; 1); B (2; -3; 0); C (1; 4; 5); D (2; 3; 4)
23 A (3; -1; 2); B (4; 0; 4); C (-1; 9; -1); D (3; -2; -2)
24 A (3; -2; 1); B (4; 2; 1); C (-1; -1; 1); D (3; 0; 1)
25 A (-2; 0; 1); B (4; -1; 3); C (-3; 2; 1); D (4; 1; 1)

Практическая работа №33
Тема: Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.
Цель: закрепить умения применять правила действия над векторами при решении математических и прикладных задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,
Сведения из теории:
Рассмотрим задачи трёх типов, которые целесообразно решать с помощью векторов.
Первый тип: задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскости

Пример 1.
Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противолежащих сторон четырехугольника, равен половине векторной суммы двух других противолежащих сторон.
Решение:
пусть $ABCD$ – четырехугольник, M – середина AB, N– середина CD. Тогда необходимо доказать, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.
Пусть O – произвольная точка плоскости, соединим ее с вершинами и серединами двух сторон четырехугольника, выполним рисунок



По правилу деления отрезка в заданном отношении, имеем:
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$,

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

По правилу треугольника, имеем:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}).$$

Задача для самостоятельного решения №1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

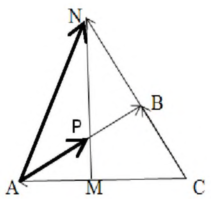
Второй тип: задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в заданном отношении

Пример 2.

На стороне AC треугольника ABC взята точка M так, что $|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$, а на продолжении стороны BC такая точка N что $|\overrightarrow{BN}|=|\overrightarrow{BC}|$. В каком отношении точка P пересечения AB и MN делит каждый из этих отрезков.

Решение:

выполним рисунок соответствующий условию задачи:



Пусть и $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}}=x,\ \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=y$.

Выберем базисные векторы $\overrightarrow{CB}=\vec{a},\ \overrightarrow{CA}=\vec{b}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами:

$a)$ $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=y$, тогда $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{y}{y+1}$, т.к. векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены, то

$$\overrightarrow{AP}=\frac{y}{y+1}\overrightarrow{AB}=\frac{y}{y+1}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{y}{y+1}(\vec{a}-\vec{b}).$$

Т.е.

$$\overrightarrow{AP}=\frac{y}{y+1}\vec{a}-\frac{y}{y+1}\vec{b}.$$

б) $\dfrac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x$, тогда , $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{x+1}\overrightarrow{AM} + \dfrac{x}{x+1}\overrightarrow{AN}$.

Но, по условию задачи $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\vec{b}\right|$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{x}{x+1}(2\vec{a} - \vec{b}).$$

В полученном выражении раскроем скобки, упростим, тогда получим:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2x}{x+1}\vec{a} - \frac{1+4x}{4(x+1)}\vec{b}.$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим систему:

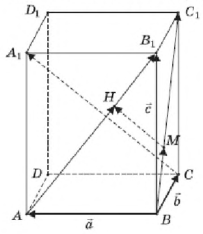
$$\begin{cases} \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{2x}{x+1}, \\ \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{1+4x}{4(x+1)} \end{cases}.$$

Решая систему любым известным способом (сложением, подстановкой), получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, точка P делит отрезок AB в отношении 2:3 и отрезок MN в отношении 1:4.

Задача для самостоятельного решения №2. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков



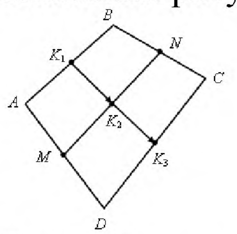
Третий тип: задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой

Пример 3

Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем AM:MD=BN:NC=3:4. Докажите, что середины отрезков AB, MN и CD лежат на одной прямой.

Решение:

выполним рисунок соответствующий условию задачи



Пусть K_1 – середина AB, K_2 – середина MN, K_3 – середина CD. Используя формулы деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),$$

$$\overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия $AM:MD=BN:NC=3:4$ следует, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Т.о., векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Задача для самостоятельного решения №3. В пространстве расположены отрезки AB и A_1B_1. Точка M есть середина отрезка AB, точка M_1 – середина A_1B_1. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, и MM_1 расположены на одной прямой.

Контрольные вопросы:

Приведите примеры задач, которые целесообразно решать с помощью векторов.

ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ВАЛУЙСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ»

Рассмотрено:
на заседании ЦМК
Протокол №_1_ от _31.08_ 2020
Председатель____________
Тютюнникова Г.В.

Согласовано:
зам. директора по УР
Кошман А.В.____________

Методические указания для выполнения внеаудиторной самостоятельной работы учебной дисциплины Математика

Профессия:
15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике.

Автор: Синченко Е.В.
преподаватель математики

г.Валуйки

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации к самостоятельным работам составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта для профессии: 15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике . В соответствии с учебным планом на самостоятельную (внеаудиторную) работу студентов по дисциплине математика отводится 106 часов.

Требования к результатам освоения дисциплины: освоение содержания учебной дисциплины «Математика» обеспечивает достижение студентами следующих ***результатов***:

- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;

- сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

АЛГЕБРА

уметь:

– выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения; выполнять арифметические действия над комплексными числами;

– находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;

– выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

– для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Функции и графики

уметь:

– вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;

– определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;

– строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;

– использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков.

Начала математического анализа

уметь:

- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Уравнения и неравенства

уметь:

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для построения и исследования простейших математических моделей.

КОМБИНАТОРИКА, СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

уметь:

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;
- анализа информации статистического характера.

ГЕОМЕТРИЯ

уметь:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, *аргументировать свои суждения об этом расположении*;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- *строить простейшие сечения куба*, *призмы*, *пирамиды*;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

В результате освоения дисциплины обучающейся должен обладать предусмотренными ФГОС по профессии: 15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике следующими общими компетенциями, включающими в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

Задания для самостоятельной работы студентов по дисциплине Математика

№ п/п	Тема	Кол-во часов	Самостоятельная работа студентов	Вид самостоятельной работы студента. Вид контроля	Примечание
1.	**Тема 1** **Развитие понятия о числе**	8	1. Развитие понятия о числе (реферат) 2. История появления вещественных чисел (реферат) 3. История возникновения натуральных чисел и нуля (реферат) История возникновения дробей (реферат)	Работа с учебником, конспектирование. Написание реферата. Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита рефератов, презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
2.	**Тема 2** **Корни, степени и логарифмы**	10	1. Степени с натуральным показателем (индивидуальная домашняя работа) 2. Корни n -й степени (индивидуальная домашняя работа) 3. Степени с рациональным показателем (индивидуальная домашняя работа) 4. Свойства степени с действительным показателем (индивидуальная домашняя работа). 5. История возникновения логарифмов (реферат)	Работа с учебником, конспектирование. Написание реферата. Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита рефератов, презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы

3.	**Тема 3** **Основы тригонометрии**	6	1. История появления тригонометрических функций (реферат) 2. История развития тригонометрии (реферат) Применение тригонометрических функций в технических расчетах (реферат)	Работа с учебником, конспектирование. Написание реферата. Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита рефератов, презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
4.	**Тема 4** **Функции, их свойства и графики**	8	1. Появление и развитие понятия функции (реферат) 2. История изучения и развития элементарных функций (реферат) 3. Вклад великих математиков в развитие понятия функции (реферат) Использование графического представления функции в практической деятельности человека (реферат)	Работа с учебником, конспектирование. Написание реферата. Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита рефератов, презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
5.	**Тема 5.1** **Последовательности**	4	1. Понятие о пределе последовательности (реферат) Нахождение n-го члена последовательности (внеаудиторная самостоятельная работа)	Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
6.	**Тема 5.2** **Производная**	8	1. Появление дифференциального исчисления (реферат) 2. Жизнь и деятельность ученых-математиков, основоположников дифференциального исчисления (реферат)	Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы

		е	3. Вычисление производных элементарных функций (расчетно-графическое задание) Использование производной в физике и технике (реферат)		
7.	**Тема 5.3** **Первообразная и интеграл**	8	1. История интегрального исчисления (реферат) 2. Вычисление определенного интеграла (расчетно-графическое задание) 3. Вычисление площади криволинейной трапеции (типовой расчет) 4. Жизнь и деятельность ученых-математиков, основоположников интегрального исчисления (реферат)	Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
8.	**Тема 6** **Уравнения и неравенства**	12 д и и	1. Линейные уравнения (доклад - презентация) 2. Квадратные уравнения (доклад - презентация) 3. Тригонометрические уравнения и неравенства (доклад-презентация) 4. Показательные уравнения и неравенства (доклад - презентация) 5. Логарифмические уравнения и неравенства (доклад - презентация) 6.Решение неравенств методом интервалов (презентация)	Работа с учебником, Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
9.	**Тема 7** **Комбинаторика, статистика и**	10	*1.* История развития комбинаторики, статистики и теории вероятностей (реферат)	Работа с учебником, конспектирование. Написание реферата.	Защита рефератов, презентаций Выступление с

	теория вероятностей		2. Дискретная случайная величина, закон ее распределения (реферат) 3. Понятие о законе больших чисел (реферат) 4. Понятие о задачах математической статистики (индивидуальная домашняя работа) Решение практических задач с применением вероятностных методов (доклад-сообщение)	Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	информацией по изученному материалу перед студентами группы
10.	**Тема 8** **Прямые и плоскости в пространстве**	14	1. История развития стереометрии (реферат) 2. Жизнь и деятельность ученых-математиков, внесших вклад в развитие геометрии (доклад-презентация) 3. Виды прямых в пространстве (индивидуальная домашняя работа) 4. Прямые и плоскости в профессиональной деятельности (реферат) 5. Перпендикулярность двух плоскостей (доклад-презентация) 6. Площадь ортогональной проекции (доклад-презентация) Параллельное проектирование (доклад-презентация)	Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
11.	**Тема 9** **Многогранники**	7	1. Правильные многогранники в природе (реферат) 2. Различные виды многогранников (презентация)	Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем	Выступление с информацией по изученному материалу перед

			3. Различные виды многогранников (изготовление макетов многогранников) Пирамиды в практической деятельности человека (реферат)	занятии	студентами группы
12.	**Тема 10** **Тела и поверхности вращения**	4	1. Тела вращения в практической деятельности человека (доклад-презентация) 2. Решение задач по теме «Тела вращения»	Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
13.	**Тема 11** **Измерения в геометрии**	4	1. Вычисление объемов многогранников (типовой расчет) Вычисление объемов тел вращения (типовой расчет)	Работа с учебником, Подготовка сообщений и презентаций. Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Защита презентаций Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы
14.	**Тема 12** **Координаты и векторы**	3	1. Векторное задание прямых и плоскостей в пространстве (реферат) Решение задач на действия с векторами (индивидуальная домашняя работа)	Контроль работы над учебником и конспектом с помощью фронтального опроса на следующем занятии	Выступление с информацией по изученному материалу перед студентами группы

Литература.

Основные источники:

Башмаков М.И. Математика. Задачник (СПО) –М., «Академия» 2018

Башмаков М.И. Учебник Математика. (СПО) – М., «Академия» 2018

Дополнительные источники:

Атанасян Л.С. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2014.

Башмаков М.И. Учебное пособие. Сборник задач профильной направленности– М., «Академия» 2014

Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. Среднее профессиональное образование – М., 2014.

Спирин П.А, Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. Среднее профессиональное образование – М.,2014.

ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ВАЛУЙСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ»

Рассмотрено:
на заседании ЦМК
Протокол №1 от 31.08 2020
Председатель
Тютюнникова Г.В.

Согласовано:
зам. директора по УР
Кошман А.В.

Методические указания к ЛПЗ учебной дисциплины Математика

Профессия:
15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике.

Автор: Синченко Е.В.
преподаватель математики

г.Валуйки

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практической работы студентов по дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по профессии: 15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике

Учебным планом на изучение дисциплины отводится 422ч, в том числе 155 часов практическая работа.

Освоение содержания учебной дисциплины «Математика» обеспечивает достижение студентами следующих ***результатов***:

- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;
- сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

АЛГЕБРА

уметь:

- выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения; выполнять арифметические действия над комплексными числами;
- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Функции и графики

уметь:

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;
- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков.

Начала математического анализа

уметь:

- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Уравнения и неравенства

уметь:

- решать рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, сводящиеся к линейным и квадратным, а также аналогичные неравенства и системы;
- использовать графический метод решения уравнений и неравенств;
- изображать на координатной плоскости решения уравнений, неравенств и систем с двумя неизвестными;
- составлять и решать уравнения и неравенства, связывающие неизвестные величины в текстовых (в том числе прикладных) задачах.

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для построения и исследования простейших математических моделей.

КОМБИНАТОРИКА, СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

уметь:

- решать простейшие комбинаторные задачи методом перебора, а также с использованием известных формул;
- вычислять в простейших случаях вероятности событий на основе подсчета числа исходов;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;
- анализа информации статистического характера.

ГЕОМЕТРИЯ

уметь:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, *аргументировать свои суждения об этом расположении*;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- *строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды*;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

В результате освоения дисциплины обучающейся должен обладать предусмотренными ФГОС по профессии: 15.01.20 Слесарь по контрольно-измерительным приборам и автоматике следующими общими компетенциями, включающими в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

Перечень практических работ:

Практическая работа № 1 Арифметические действия над числами

Практическая работа № 2 Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений.

Практическая работа № 3 Сравнение числовых выражений.

Практическая работа №4 Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами.

Практическая работа №5 Решение иррациональных уравнений. Нахождение значений степеней с рациональными показателями.

Практическая работа №6 Сравнение степеней. Преобразования выражений, содержащих степени.

Практическая работа №7 Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому.

Практическая работа № 8 Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений

Практическая работа №9 Решение логарифмических уравнений

Практическая работа №10 Решение прикладных задач.

Практическая работа № 11 Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.

Практическая работа №12 Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения

Практическая работа №13 Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Практическая работа №15 Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

Практическая работа №16 Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Практическая работа №17 Примеры зависимостей между переменными в реальных процессах из смежных дисциплин

Практическая работа №18 Определение функций. Построение и чтение графиков функций. Исследование функции.

Практическая работа №19 Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций. Непрерывные и периодические функции.

Практическая работа №20 Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Практическая работа № 21Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции.

Практическая работа №22 Преобразования графика функции. Гармонические колебания. Прикладные задачи.

Практическая работа №23 Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства.

Практическая работа №24 Способы задания числовой последовательности, вычисления членов последовательности

Практическая работа №25 Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Практическая работа №26 Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций.

Практическая работа №27 Решение упражнений на вычисление производной
Практическая работа №28 Решение задач на применение производной к исследованию функций и построению функций
Практическая работа №29 Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции
Практическая работа №30 Решение задач по правилам вычисления первообразной Практическая работа №31Решение задач на вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница
Практическая работа №32 Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей
Практическая работа №33 Нахождения корней уравнения

3-4 семестр

Практическая работа №1 Нахождения корней уравнения
Практическая работа №2Равносильность уравнений.
Практическая работа №3 Преобразование уравнений.
Практическая работа №4 Основные приемы решения уравнений
Практическая работа №5 Решение систем уравнений
Практическая работа №6 Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств
Практическая работа №7 Решение задач на применение бинома Ньютона и треугольника Паскаля
Практическая работа №8 Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач
Практическая работа №9 Размещения, сочетания и перестановки
Практическая работа №10 Вычисление вероятностей. Представление числовых данных
Практическая работа №11 Понятие о задачах математической статистики. Решение практических задач с применением вероятностных методов
Практическая работа №12 Решение прикладных задач
Практическая работа №13 Взаимное расположение прямых и плоскостей.
Практическая работа №14 Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах.
Практическая работа №15 Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости.
Практическая работа №16 Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.
Практическая работа № 17 Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.
Практическая работа № 18 Параллельное проектирование и его свойства. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника.
Практическая работа №19Взаимное расположение пространственных фигур.
Практическая работа №20 Решение задач по теме «Многогранники»
Практическая работа №21 Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки
Практическая работа № 22 Площадь поверхности. Вычисление площадей поверхностей
Практическая работа № 23 Представление о правильных многогранниках
Практическая работа № 24 Виды симметрий в пространстве. Симметрии многогранников
Практическая работа № 25 Решение задач по теме «Тела вращения»
Практическая работа № 26 Площадь поверхности. Вычисление площадей и объемов
Практическая работа № 27 Решение задач на вычисление объемов многогранников и тел вращения
Практическая работа №28 Вычисление площадей и объемов
Практическая работа №29 Решение задач на составление уравнений прямой, плоскости, окружности, сферы.
Практическая работа №30 Решение задач на действия с векторами.
Практическая работа №31 Решение задач на нахождения расстояния между точками.
Практическая работа №32 Скалярное произведение векторов.
Практическая работа №33 Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Практическая работа № 1

Тема: Арифметические действия над числами
Цель: Научиться вычислять арифметические действия над числами

Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради

Теоретический материал
Изучение математики начинается с натуральных чисел, т.е. с чисел 1, 2, 3, 4, 5,… . При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.
Дополнением натуральных чисел нулем и отрицательными числами (т.е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т.е. чисел 0, ± 1, ± 2, ± 3, … . При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.
При выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.
Бесконечную десятичную дробь 0,3333… называют *периодической*, повторяющуюся цифру 3 – ее *периодом*. Периодическую дробь 0,333… коротко записывают так: 0,(3); читается: «Ноль целых и три в периоде».
Периодическая дробь – это бесконечная десятичная дробь, у которой начиная с некоторого десятичного знака повторяется одна и та же цифра или несколько цифр – период дроби.
Если бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001…, в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 – два нуля и, вообще, после *n* – й цифры стоит *n* нулей, не является периодической. Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом.*
Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.
Ход работы
Внимательно прочитайте теоретический материал
Повторить таблицу умножения.
Вспомнить: какие бывают множества чисел.
Повторить правила перевода дроби из периодической в обыкновенную.
Ответите письменно на вопросы
Перечислите множества чисел (натуральные, рациональные, иррациональные, действительные - примеры).
Какое множество включает все числа?
При округлении, когда мы прибавляем «1» к предыдущему числу, когда отбрасываем числа…..
При преобразовании бесконечной периодической дроби на что надо обратить внимание? … ….
Выполнить задания по образцу
Задание 1. Представить в виде бесконечной десятичной дроби числа. Выполнить деление столбиком, не используя калькулятор.

$$а)\frac{1}{7},\quad б)\frac{5}{\pi},\quad в)\frac{7}{13},\quad г)\frac{15}{19},\quad д)\frac{13}{29},\quad е)\frac{39}{41}.$$

(пример):
а) 10 | 7
7 | 0, 1428571…
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
10
7 и т.д.

Задание 2. Преобразовать бесконечную периодическую дробь в обыкновенную:

$$а)0,3(12);\qquad г)0,32(16)$$
$$б)2,13(7);\qquad д)4,(521)$$
$$в)0,5(72);\qquad е)0,(035)$$

Пример

Задание		Ответ
а)	0,3(12)	Пусть x = 0,312… / 10 10x = 3,12… / 100 1000x = 312,12 1000x – 10x = 312,12 – 3,12 990x = 309 x = 309 : 990 = $\frac{103}{330}$

Задание 3.

Число $\dfrac{9\cdot 196\cdot 625}{40\cdot 49\cdot 225}$ **равно**

$\boxed{1}$ 1 $\boxed{2}$ 0,5 $\boxed{3}$ 2,5 $\boxed{4}$ 2 $\boxed{5}$ 5.

Задание 4.

Число $1996\dfrac{184}{995} - 1995\dfrac{21}{199} + \dfrac{24}{199}$ **равно**

$\boxed{1}$ 1,2 $\boxed{2}$ 0,2 $\boxed{3}$ $\dfrac{193}{398}$ $\boxed{4}$ $\dfrac{83}{398}$ $\boxed{5}$ 1.

Задание 5

$$\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3{,}(5)\right) - \frac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5 - 18\frac{2}{3}\cdot 11} - \frac{1}{18}$$

Практическая работа № 2

Тема: Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений

Цель: Научиться вычислять абсолютную и относительную погрешность

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, микрокалькулятор.

Теоретический материал

Модуль (абсолютная величина) разности между точным числом x и его приближенным значениемa называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа x и обозначается через α, т.е.$|x\text{-}a|=\alpha$.

Число a называется *приближенным значением* точного числа x с точностью до Δa, если абсолютная погрешность приближенного значения a не превышает Δa, т.е. $|x\text{-}a|\leq \Delta a$

ЧислоΔa называется *границей абсолютной погрешности* приближенного числа a.

По известной границе абсолютной погрешностиΔa находятся границы, в которых заключено точное значение числа x:

$(x=a\pm\Delta a) \Leftrightarrow (a - \Delta a\leq x \leq a +\Delta a)$

Относительной погрешностью δ приближенного значенияa числа x называется отношение абсолютной погрешности α этого приближения к числу a:

$\delta = \frac{\alpha}{a}$

Число ε называется *границей относительной погрешности.*

Границей относительной погрешности a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a : $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}$

Чем меньше относительная погрешность, тем выше качество измерений или вычислений. Относительная погрешность – величина безразмерная, что позволяет сравнивать качество измерений величин разной размерности.

Ход работы

1. Прочитайте внимательно теоретический материал
2. Ответе на вопросы:

Понятие абсолютной погрешности.

Понятие относительной погрешности.

3. Выполните задания пользуясь основными формулами для нахождения абсолютной и относительной погрешностей

Задание. Даны приближенные значения числа x= $\frac{2}{3}$; a_1=0,6; a_2=0,66; a_3=0,67. Какое из этих приближений является лучшим?
Площадь квадрата равна 24,5 ±0,4 (см^2). Найти границы измерения площади квадрата.
В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты равна 730 см. Что можно сказать о качестве этих двух измерений?
Найти относительную погрешность числа 6,8 , если обе цифры его верны в строгом смысле.
Выполните тест, ответы запишите в таблицу в тетради

I Вариант

1. Округлите до сотых 0,53748.
а) 0,5; б) 0,54; в) 0,53; г) 0,537; д) 0,5375.

2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{3}{22}$ числом $\frac{1}{7}$.

а) $-\frac{1}{154}$; б) $\frac{43}{154}$; в) $\frac{1}{154}$; г) $-\frac{43}{154}$; д) другой ответ.

3. В каких границах заключено число y , если y = 20,6 ± 0,72?

а) $19{,}88 \le y \le 21{,}32$; б) $13{,}4 \le y \le 27{,}8$; в) $20 \le y \le 21$; г) $19{,}32 \le y \le 21{,}88$;
д) определить нельзя.

4. Пусть x = 10,68 ± 0,15. Каким может быть точное значение x ?

а) 10,831; б) 10,531; в) 10,529; г) 11; д) 9.

5. Представьте обыкновенную дробь $\frac{7}{19}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.

а) 0,369; б) 0,368; в) 0,370; г) 0,367; д) 0,37.

6. Выберите неверное утверждение.
а) модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением называется абсолютной погрешностью приближения;
б) если число x равно числу a с точностью до h, то пишут $x = a \pm h$;
в) запись $x \approx a$означает, что a является приближённым значением числа x;
г) $520{,}91 = 5{,}2091 \cdot 10^2$;
д) $\frac{2}{3} = 0{,}69 \pm 0{,}01$.

7. Найдите относительную погрешность округления 9,736 до десятых.

а) 0,037%; б) 3,7%; в) 0,37%; г) 37%; д) 0,0037%.

8. Известно, что x= 0,82 ± 0,2. Найдите относительную погрешность.

а) 24%; б) 2,4%; в) 0,24%; г) 25%; д) другой ответ.

9. Известно, что $x \approx 7{,}31$; $y \approx 0{,}2$. Найдите $1{,}2x + y$.

а) 8,97; б) 9; в) 8,9; г) 8,972; д) 9,0.

10. Известно, что x ≈ 12,25; y ≈ 1,86; z ≈ 21,31. Найдите $\frac{x-y}{3} \cdot z + 9$.

а) 82,80; б) 83; в) 82; г) 82,8; д) другой ответ.

II Вариант

1. Округлите до сотых 0,64859.

а) 0,65; б) 0,6; в) 0,64; г) 0,649; д) 0,6486.

2. Найдите абсолютную погрешность приближения числа $\frac{3}{26}$ числом $\frac{1}{9}$.

а) $-\frac{1}{234}$; б) $\frac{53}{234}$; в) $-\frac{53}{234}$; г) $\frac{1}{234}$; д) другой ответ.

3. В каких границах заключено число x , если $x = 30{,}5 \pm 0{,}81$?

а) $29{,}69 \le x \le 31{,}31$; б) определить нельзя; в) $30 \le x \le 31$; г) $22{,}4 \le x \le 38{,}6$; д) $29{,}31 \le x \le 31{,}69$.

4. Пусть $x = 10{,}82 \pm 1{,}31$. Каким может быть точное значение x ?

а) 12,131; б) 9,513; в) 9,49; г) 13; д) 9.

5. Представьте обыкновенную дробь $\frac{8}{13}$ в виде десятичной с точностью до 0,001.

а) 0,616; б) 0,614; в) 0,620; г) 0,615; д) 0,62.

6. Выберите неверное утверждение.

а) относительной погрешностью называется частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины;

б) если $x = a \pm h$, то $a - h \le x \le a + h$;

в) точность измерения приборов устанавливается по наименьшему делению прибора;

г) $224{,}62 = 2{,}2462 \cdot 10^4$;

д) $\frac{2}{9} = 0{,}22 \pm 0{,}01$.

7. Найдите относительную погрешность округления 5,314 до сотых.

а) 0,0075%; б) 7,5%; в) 0,075%; г) 75%; д) 0,75%.

8. Известно, что $y = 0{,}73 \pm 0{,}3$. Найдите относительную погрешность.

а) 41%; б) 4,1%; в) 0,41%; г) 42%; д) другой ответ.

9. Известно, что $x \approx 6{,}1$; $y \approx 0{,}93$. Найдите $x - 1{,}2y$.

а) 4,984; б) 4,98; в) 4,9; г) 5; д) 5,0.

10. Известно, что x ≈ 5,41; y ≈ 13,22; z ≈ 0,61. Найдите $\frac{x+y}{2z} + 8$.

а) 23,3; б) 23; в) 23,30; г) 24; д) другой ответ.

Практическая работа №3

Тема: Сравнение числовых выражений

Цели: Научиться сравнивать числовые выражения

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради

Ход работы

1. Прочитать соответствующий заданию раздел   по учебному пособию «Математика» М.И. Башмаков, главы 1, страницы 5 – 12.
 2. Выполнить задания по вариантам

Вариант 1

1.Найти НОД и НОК чисел:
а) 154 и 210
б) 255 и 510
2. Найдите остаток отделения на 3 числа:
а) 1 234 321; б) 55 555 155 555
3. Записать в виде десятичной дроби
а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{11}$
4. Сравните числовые значения выражений:
$\sqrt{5}$-1 и $\sqrt{2}$;
5. Вычислить:
а) $\sqrt{(|(\sqrt{3}) - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})|}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + 1$.
в) $\frac{2}{7+4\sqrt{3}} + \frac{2}{7-4\sqrt{3}}$.

6. Вычислить:

$$\frac{4{,}5 : (47{,}375 - \left(26\frac{1}{3} - 18 \cdot 0{,}75\right) \cdot 24 : 0.88)}{17{,}81 : 1{,}37 - 23\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}}$$

Вариант 2

1.Найти НОД и НОК чисел:
а) 120 и 144
б) 105 и 165
2. Найдите остаток отделения на 9 числа:
а) 1 234 567; б) 55 555 155 555
3. Записать в виде десятичной дроби
а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{7}{11}$
4. Сравните числовые значения выражений:
$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$;
5. Вычислить:
а) $\sqrt{(|(\sqrt{2}) + \sqrt{11})(\sqrt{2} - \sqrt{11})|}$; б) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ - 1.
в) $\frac{3}{5-2\sqrt{6}} + \frac{2}{5+2\sqrt{6}}$.
6. Вычислить: $\frac{\left(19\frac{1}{6} + 43{,}75\right) : \frac{5}{6}}{\left(13{,}3 - 11\frac{1}{2}\right) : 1{,}8} - \frac{\left(26{,}8 - 23\frac{3}{7}\right) : \frac{6}{35}}{0{,}5}$

Практическая работа №4

Тема: Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами.
Цель: Научиться вычислять и сравнивать корни. Выполнять расчеты с радикалами.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради

Теоретический материал

Свойства степеней:

Произведение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $a^p \cdot b^p = (ab)^p$

Деление степеней	$\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$ $\frac{a^p}{b^p}=\left(\frac{a}{b}\right)^p$
Возведение степени в степень	$(a^p)^q=a^{pq}$

Свойства корней:

$1^\circ.\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$

$2^\circ.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0).$

$3^\circ.\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}\ (k>0).$

$4^\circ.\ \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}\ (k>0).$

$5^\circ.\ \sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leqslant 0$, то $a\neq 0$).

Ход работы:

1. Прочитайте теоретический материал.
2. Выполните задания, подробно расписывая решение, в конце решения укажите ответ

1. Представьте выражение $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b^4}}:\sqrt[3]{b^2\sqrt{b^3}}$ в виде степени.

2. Найдите значение выражения:

1). $((\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{4}}\cdot(\frac{1}{125})^{-\frac{1}{3}})^{-1}$; 2). $\sqrt{16-\sqrt{31}}\cdot\sqrt{\sqrt{31}+16}$

3.Выполните действия:

1). $(\sqrt[3]{25x^2}-\sqrt[3]{16y^2}):(\sqrt[3]{5x}-\sqrt[3]{4y})$; 2). $\frac{x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{4}}}:\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$

4. выражение:

1). $\frac{\sqrt[6]{y^2}-4}{\sqrt[6]{y}+2}+2$; 2). $\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{4}}-1}-\sqrt[4]{a}$; 3). $\frac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}-2a^{\frac{1}{6}}$;

4). $\frac{x^{\frac{3}{4}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1}-2x^{\frac{1}{8}}$; 5). $\frac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}+y}+2\sqrt{y}$;

5. Вычислите:

1). $0{,}3\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}-0{,}1$; 2). $0{,}1\cdot\sqrt{20}:\sqrt{45}-2\frac{17}{30}$; 3). $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-11}\cdot\sqrt{11}$

4). $64^{-\frac{5}{6}}-(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}-32\cdot 2^{-4}\cdot 16^{-1\frac{1}{2}}+(3^0)^4\cdot 4$

5). $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}+27^{-2\frac{1}{3}}+(6^0)^5\cdot 2-3^{-4}\cdot 81^{-\frac{3}{2}}\cdot 27$

6.Найдите значение выражения $\frac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4}+\frac{4\cdot y^{0,5}}{y-16}$ при y=18

Практическая работа № 5

Тема: Решение иррациональных уравнений. Нахождение значений степеней с рациональными показателями.

Цель:Отработать навыки решения уравнений. Научиться вычислять степенные выражения содержащие степень с рациональным показателем

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инстрункционная карта, тетрадь, учебник

Теоретический материал

Уравнение (неравенство), в котором **под знаком корня** содержится **переменная**, называют **иррациональиым.**

Введем два важнейших понятия, полезных при решении иррациональных уравнений и неравенств. Первое из них – **область допустимых значений (ОДЗ)** – вам уже знакомо. **ОДЗ** называется **множество значений переменной**, при которых **уравнение или неравенство имеет смысл.** В рассматриваемой теме ОДЗ, как правило, определяется возможностью извлечения корня четной степени из выражений.

Решим уравнение $21+\sqrt{2x-7}=x$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x-7}=x-21$ и решим его двумя способами. Учтем, что для уравнения ОДЗ: $x\in\left[\frac{7}{2};\infty\right)$ и ОСР: $x\in[21;\infty)$. Поэтому корни уравнения могут находиться только в промежутке $x\in[21;\infty)$.

1 способ. Возведем обе части уравнения в квадрат: $2x-7=$

Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке, абсцисса которой $x = 28$ и является корнем данного уравнения.

Недостаток этого способа решения – достаточно громоздкие коэффициенты полученного квадратного уравнения $0=x^2-44x+448$.

2 способ. Введем новую переменную $t=\sqrt{2x-7}$ (где $t\geq 0$) и выразим x: $t^2=2x-7$ и $x=\frac{t^2+7}{2}$. Тогда данное уравнение имеет вид:

$=x^2-42x+441$ или $0=x^2-44x+448$. Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 28$ и $x_2 = 16$. Для данного иррационального уравнения корень $x = 16$ является посторонним, так как не входит в ОСР.

$21+t=\dfrac{t^2+7}{2}$ или $0=t^2-2t-35$ (заметим, что коэффициенты этого квадратного уравнения небольшие), корни которого $t_1 = 7$ и $t_2 = -5$ (не подходит, так как $t \geq 0$). Вернемся к старой переменной и найдем корень данного уравнения: $x=\dfrac{7^2+7}{2}=28$.

Из приведенного примера видно, что эффективным приемом является **использование новой переменной (замена переменной)**.

Свойства степеней:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$(a^r)^s = a^{rs}$

$(ab)^r = a^r b^r$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

$a^0 = 1$

Ход работы:

1. Внимательно прочитайте теоретический материал

2. Составьте в тетради алгоритм решения иррациональных уравнений

3. Решите следующие уравнения:

Вариант 1 – 1,3,5,7,9,11,13,15

Вариант 2 – 2,4,6,8,10,12,14,15

1) $\sqrt{x}=2-x$; 2) $x-\sqrt{x+1}=1$; 3) $(x^2-9)\sqrt{2-x}=0$;

4) $(x^2-4)\sqrt{x+5}=0$; 5) $x-1=\sqrt{x+5}$; 6) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$;

7) $\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}$; 8) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$;

9) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$;

10) $\sqrt{x^2+3x+3}+\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{2x^2+6x+2}$;

11) $\sqrt{8-2x+x^2}=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{6-2x}$; 12) $2\cdot\sqrt[3]{x}+5\cdot\sqrt[6]{x}-18=0$;

13) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$; 14) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$;

15) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$.

4. Вычислите:

а) $-24\cdot 125^{\frac{1}{3}}-39$.

б) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{36}}$.

в) $\dfrac{\left(0{,}216^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}}{0{,}09^{\frac{3}{4}}\cdot 0{,}027^{\frac{1}{6}}}$.

г) $18\cdot 27^{-\frac{2}{3}}-0{,}4$.

д) $\left(\dfrac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

е) $9^{-\frac{3}{2}}-(5^0)^3\cdot 3+(0{,}01)^{-0{,}5}-9\cdot 3^{-3}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}$.

1) 13; *2) 7;* *3) 3;* *4)* $\dfrac{1}{9}$.

ж) $\dfrac{35}{25^{\frac{1}{2}}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$.

1) $\dfrac{28}{5}$ *2)* 1 *3)* 3,5 *4)* 14

з) $2^3\cdot 2^{-2}+2^{-3}\cdot 2^2+1{,}25$.

и) $2\cdot\left(\dfrac{1}{64^{-\frac{1}{3}}}\right)+0{,}8$.

Практическая работа № 6

Тема: Сравнение степеней. Преобразования выражений, содержащих степени.

Цель:Научиться сравнивать степени. Преобразовывать выражения, содержащие степени.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы

1. Прочитать и выполнить задания (по вариантам) А-низкий уровень сложности, В-средний уровень ложности, С-высокий уровень сложности. Выберите самостоятельно один из предложенных вариантов и решите.

1. Вычислите:

Вариант А

1) $\sqrt{841}$; 2) $\sqrt{0{,}0625}$; 3) $\sqrt{0{,}000324}$; 4) $\sqrt[3]{2{,}16\cdot 10^5}$; 5) $\sqrt[4]{1{,}296\cdot 10^{-5}}$;

6) $\dfrac{(-3)^3\cdot 3^5}{(-3)^9}$; 7) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-2}$; 8) $\dfrac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left(5^0-\dfrac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot 10^{-1}$;

9) $\left(\dfrac{256}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 10) $(0{,}064)^{\frac{2}{3}}$; 11) $4^{3{,}5}$; 12) $\left(2{,}7\cdot 10^{-8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

Вариант Б

1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}-\sqrt[3]{216}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{4}}$;

4) $\sqrt[3]{512}-\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; 5) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{125}}{125}}$; 6) $0{,}27^{-\frac{1}{3}}\cdot 0{,}1^{-\frac{1}{3}}$; 7) $8^{-0{,}5}:32^{1{,}5}$;

$8)\ 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 64^{-\frac{1}{2}};\ 9)\ \left(3^{-\frac{3}{4}} \cdot 8\right)^{\frac{4}{3}};\ 10)\ 4^{-\frac{3}{2}} + 4^{0} + 4^{\frac{3}{2}};$

$11)\ 4^{3,5};\ 12)\ \left(2{,}7 \cdot 10^{-8}\right)^{-\frac{4}{3}};$

Вариант В

$1)\ \left(2\sqrt{2}\right)^{-2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-4};\ 2)\ \sqrt{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{6}};$

$3)\ \sqrt[3]{2 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 7^4};\ 4)\ \sqrt{16-6\sqrt{7}};\ 5)\ \sqrt[6]{54}\sqrt{6}\sqrt[3]{2};\ 6)\ \left(0{,}09^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}};$

$7)\ \left(8-37^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(8+37^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}};\ 8)\ (54 \cdot 250)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} - 128^{\frac{1}{6}};$

2. Сравните:

Вариант А

$1)\ 91^2$ и 91^3; $2)\ 26^4$ и 5^8; $3)\ 2^{3^2}$ и 2^{2^3}; $4)\ 10^{20}$ и 20^{10};

$5)\ 9^5$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}$; $6)\ (3^{-2})^{-3}$ и $(3^3)^2$; $7)\ 27^3$ и 3^6; $8)\ \left(\frac{1}{5}\right)^{11}$ и $\left(\frac{1}{7}\right)^{11}$;

$9)\ \left(\frac{11}{13}\right)^4$ и $\left(\frac{13}{11}\right)^4$; $10)\ 27^{\frac{2}{3}}$ и $9^{\frac{5}{2}}$;

Вариант Б

$1)\ 9^{\frac{3}{2}}$ и 28; $2)\ (\sqrt{125})^3$ и $5(\sqrt{5})^7$; $3)\ 45^2 - 31^2$ и $44^2 - 30^2$;

$4)\ 296^3 - 214^3$ и $(296-214)^3$; $5)\ (117+213)^3$ и $117^3 + 213^3$;

$6)\ 2\,048^3$ и 2^{33}; $7)\ 28^{16}$ и 79^{12}; $8)\ 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 10^{10}$ и 10^{55};

$9)\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ и $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; $10)\ \left(2\sqrt[4]{2}\right)^{100}$ и $\left(\frac{1}{8}\right)^{-8}$

Вариант В

$1)\ \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\left(\sqrt{8}\right)^{-10}$; $2)\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$ и $\sqrt[13]{5}$; $3)\ 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{81}$; $4)\ \sqrt[12]{623}$ и $\sqrt[3]{5}$;

$5)\ \frac{1}{2}\sqrt{40}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{99}$; $6)\ \sqrt{7} + \sqrt{15}$ и 7; $7)\ \left(1{,}2+\sqrt{5}\right)^{100}$ и 3^{100};

$8)\ \sqrt{12} - \sqrt{11}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{10}$; $9)\ \sqrt[30]{1} + \sqrt[4]{2}$ и 2; $10)\ \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{32}}}$ и $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^8}}}$;

Практическая работа № 7

Тема: Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому.

Цель: Научиться вычислять и преобразовывать логарифмические выражения использовав основные свойства логарифма

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Свойства логарифмов:

1° $a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество.

2° $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$

3° $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.

4° $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ - логарифм произведения.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

5° $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ - логарифм частного.

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.

6° $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ - логарифм степени.

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.

7° $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

8° $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал.
2. Выполните задания по вариантам, с подробным решением

Вариант 1

В1. Вычислить $\log_{\frac{1}{2}} 16$.

В2. Вычислить $5^{1+\log_5 3}$.

В3. Вычислить $\log_3 135 - \log_3 20 + 2\log_3 6$.

В4. Вычислить $16^{\log_2 6} - 5^{-\log_5 \frac{1}{17}}$.

В5. Вычислить $\log_{0,25} 0,64 + \log_{0,5} 10$.

В6. Вычислить $\frac{\log_{0.5} 0,125 \cdot \log_7 64}{\log_7 2}$.

В7. Найти значение выражения $\log_7 \frac{49}{b}$, если $\log_7 b = 2,5$.

В8. Найти значение выражения $\log_6^2 27 + \frac{3\log_6 12^3}{\log_{108} 6}$.

В9. Решить уравнение $\log_3 4x - \log_3 6 = \log_3 20$.

В10. Найдите корень или сумму корней уравнения, если их несколько $\log_6(2x+12) - \log_6(x-9) = \log_6 x$.

Вариант 2

В1. Вычислить $\log_3 \frac{1}{27}$.

В2. Вычислить $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}} 7}$.

В3. Вычислить $\log_2 56 + 2\log_2 12 - \log_2 63$.

B4. Вычислить $27^{1-\log_3 6} - 4^{-\log_4 0,125}$.

B5. Вычислить $\log_6 144 - \log_{36} 576$.

B6. Вычислить $\dfrac{\log_4 81 \cdot \log_{1,5} 2,25}{\log_4 3}$.

B7. Найти значение выражения $\log_5(125m)$, если $\log_5 m = -1,5$.

B8. Найти значение выражения $\log_{15}^2 81 + \dfrac{16\log_{15} 75}{\log_{675} 15}$.

B9. Решить уравнение $\log_5(4x) - \log_5 3 = \log_5 8$.

B10. Найдите корень или сумму корней уравнения, если их несколько
$\log_3^2(x+15)^4 = 16\log_3(x+15)$.

Практическая работа № 8

Тема: Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений.
Цель: Научиться вычислять, сравнивать, логарифмировать и потенцировать выражения.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетрадь, учебник

Ход работы

1. Прочтите теоретический материал п.р № 13,14
2. Вычислите:

$2^{\log_2 3}$	$0,3^{2\log_{0,3} 6}$	$\lg 1$
$4^{\log_2 3}$	$7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$	$10^{lg 2}$
$2^{\log_4 3}$	$8^{\log_2 5}$	$100^{\lg 4}$
$27^{\log_3 \sqrt[3]{4}}$	$9^{\log_3 12}$	$0,1^{\lg 5}$
$3^{\log_3 18}$	$16^{\log_4 7}$	$10^{2\lg 7}$
$5^{\log_5 16}$	$0,125^{\log_{0,5} 1}$	$10^{\frac{1}{3}\lg 27}$
$10^{\log_{10} 2}$	$\lg\frac{1}{1000}$	$0,01^{-\lg 2}$
$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$	$\lg 10\sqrt[3]{100}$	$10^{-lg 15}$
$3^{5\log_3 2}$	$\lg 100\sqrt[5]{10}$	$0,001^{\log_{0,1} 10}$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$	$\lg 0,1$	
	$\lg 1000$	
	$\lg 10$	

3.Сравните

а) 3^{400} и 4^{300}; **б)** $-\log_5 \frac{1}{5}$ и $7^{\log_3 1}$;

в) 5^{200} и 2^{500}; **г)** $\log_4 \sqrt{2}$ и $\log_3 \frac{1}{81}$.

а) $\log_3 2 + \log_3 7$ и $\log_3(2+7)$;
б) $\log_4 5 - \log_4 3$ и $\log_4(5-3)$;
в) $3\log_7 2$ и $\log_7(3-2)$;
г) $\log_3 1,5 + \log_3 2$ и $\log_3 1,5^2$.

4. Потенцирование выражений. Найти x по данному его логарифму:

а) $\log_4 x = 2\log_4 10 + \frac{3}{4}\log_4 81 - \frac{2}{3}\log_4 125$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16 - \log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 28$.

в) $\log_5 x = \frac{1}{2}\log_3 144 + \log_3 0{,}75$;

г) $\log_\pi x = 3\log_{0,1} 4 + 2\log_{0,1} 1\frac{1}{4}$.

д) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a(m-n) - \frac{1}{3}\log_a(m+n)$

Практическая работа № 9

Тема: Решение логарифмических уравнений

Цель: Научиться решать логарифмические уравнения

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Ниже приведены основные формулы, которые надо знать, чтобы справиться с логарифмами:

$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$

$\log_a x - \log_a y = \log_a (x : y)$

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_{(a^k)} x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$

$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

Кроме того, надо уметь заменять корни и дроби на степени с рациональным показателем, иначе в некоторых выражениях выносить из под знака логарифма будет просто нечего.

Формулы замены: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Из определения логарифма вытекают две формулы, которые постоянно встречаются в реальных задачах. Эти формулы позволяют заменить знак логарифма нормальными числами:

$\log_a a^n = n$

$b^{\log_b a} = a$

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал
2. Решите один из предложенных вариантов

Вариант1.

Решите уравнение:

$\log_2(4-x) = 7$

$\log_5(4+x) = 2$

$\log_5(5-x) = \log_5 3$

$\log_4(x+3) = \log_4(4x-15)$

$\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2$

$\log_3(5-x) = 2\log_3 5$

$\log_7(x^2+5x) = \log_7(x^2+6)$

$\log_4(5+6x) = \log_4(3+4x) + 1$

решите уравнение: $\log_{x+6} 32 = 5$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 2

Решите уравнение:

$\log_3(4-x) = 4$

$\log_3(9+x) = 4$

$\log_3(14-x) = \log_3 5$

$\log_3(x+4) = \log_3(2x-12)$

$\log_{\frac{1}{7}}(7-3x) = -2$

$\log_3(7-x) = 3\log_3 5$

$\log_8(x^2+x) = \log_8(x^2-4)$

$\log_3(3+2x) = \log_3(1-2x) + 1$

решите уравнение: $\log_{x+5} 4 = 2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 3

Решите уравнение:

$\log_6(3-x) = 2$

$\log_2(8+x) = 3$

$\log_2(16+x) = \log_2 3$

$\log_{\frac{1}{4}}(9-5x) = -3$

Вариант 4

Решите уравнение:

$\log_2(7-x) = 6$

$\log_2(3+x) = 5$

$\log_5(1+x) = \log_5 4$

$\log_4(x+8) = \log_4(5x-4)$

$\log_9(x+6)=\log_9(4x-9)$
$\log_2(9-x)=2\log_2 3$
$\log_5(x^2+4x)=\log_5(x^2+11)$
$\log_3(7+2x)=\log_3(3-2x)+2$
решите уравнение: $\log_{x-2}16=2$Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

$\log_{\frac{1}{8}}(13-x)=-2$
$\log_2(11-x)=4\log_2 5$
$\log_3(x^2+4x)=\log_3(x^2+4)$
$\log_4(5-x)=\log_4(2-x)+1$
решите уравнение $\log_{x+1}49=2$: Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 5
Решите уравнение:

$\log_2(4-x)=5$
$\log_2(7+x)=3$
$\log_{11}(16+x)=\log_{11}12$
$\log_5(x+6)=\log_5(4x-3)$
$\log_{\frac{1}{3}}(9-3x)=-2$
$\log_2(18-6x)=4\log_2 3$
$\log_4(x^2-4x)=\log_4(x^2+3)$
$\log_5(8+3x)=\log_5(7-3x)+1$
решите уравнение: $\log_{x-1}25=2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 6
Решите уравнение:

$\log_4(5-x)=2$
$\log_2(3+x)=7$
$\log_{11}(9+x)=\log_{11}3$
$\log_7(x+9)=\log_7(5x-7)$
$\log_{\frac{1}{9}}(13-x)=-2$
$\log_7(15-x)=2\log_7 4$
$\log_4(x^2+x)=\log_4(x^2+6)$
$\log_2(4+x)=\log_2(2-x)+2$
решите уравнение: $\log_{x+7}25=2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 7
Решите уравнение:

$\log_3(4-x)=2$
$\log_2(7+x)=6$
$\log_7(8+x)=\log_7 10$
$\log_8(x+9)=\log_8(2x-17)$
$\log_{\frac{1}{2}}(13-x)=-4$
$\log_2(4-x)=2\log_2 5$
$\log_5(x^2+5x)=\log_5(x^2+2)$
$\log_2(8+7x)=\log_2(8+3x)+1$
решите уравнение: $\log_{x-3}81=4$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 8
Решите уравнение:

$\log_2(4-x)=8$
$\log_2(3+x)=3$
$\log_{13}(17+x)=\log_{13}3$
$\log_8(x+6)=\log_8(4x-9)$
$\log_{\frac{1}{2}}(8-4x)=-4$
$\log_5(5-5x)=2\log_5 2$
$\log_4(x^2+x)=\log_4(x^2+9)$
$\log_2(2-x)=\log_2(2-3x)+1$
решите уравнение: $\log_{x+5}36=2$Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 9
Решите уравнение:

$\log_3(3-x)=3$
$\log_2(5+x)=2$
$\log_9(9+x)=\log_9 2$
$\log_8(x+6)=\log_8(3x-8)$
$\log_{\frac{1}{3}}(6-5x)=-4$
$\log_5(5-x)=2\log_5 3$
$\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+4)$
$\log_2(8+3x)=\log_2(3+x)+1$
решите уравнение: $\log_{x-3}16=2$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Вариант 10
Решите уравнение:

$\log_2(4-x)=9$
$\log_2(4+x)=7$
$\log_3(13+x)=\log_3 2$
$\log_7(x+5)=\log_7(4x-7)$
$\log_{\frac{1}{2}}(12-4x)=-4$
$\log_4(8-5x)=2\log_4 3$
$\log_8(x^2-5x)=\log_8(x^2+4)$
$\log_4(4+7x)=\log_4(1+5x)+1$
решите уравнение $\log_{x-7}25=2$: Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них

Практическая работа № 11.
Тема: Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.
Цель: Научится переводить из градусной меры в радианную и наоборот
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал
Определение: Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называется углом в 1 радиан (рад).

Мера угла

Радианная

градусная

Формула 1:(радианная → градусная)

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha_{рад}$$

Формула 2:(градусная → радианная)

$$\alpha_{рад} = \frac{180}{\pi}\cdot\alpha^\circ$$

Формула 3:
l=α·R   где l- длина дуги,
R – радиус окружности, которую стягивает дуга
Формула 4:
S=$\frac{R^2}{2}$·α, где, l- длина дуги
R – радиус окружности, которую стягивает дуга
S – площадь кругового сектора
α=$\alpha_{рад}$ радианная мера угла
Ход работы
***Задание*1:** Найти радианную меру угла, выраженного в градусах:

а) $5^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 5 = \frac{5\pi}{180} = \frac{\pi}{36}\,рад$ б) $54^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 54 = \frac{\ldots\pi}{180} = \ldots..рад$

в) $18^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 18 = \frac{18\pi}{180} = \ldots..рад$ г) $135^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot\ldots = \ldots..рад$

***Задание*2:** Найти градусную меру угла, выраженного в радианах :

а) $\frac{\pi}{18}\,рад = (\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{18})^\circ = (\frac{180}{18})^\circ = 10^\circ$ б) $\frac{5\pi}{6}\,рад = (\frac{180}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6})^\circ = (\frac{\ldots}{6})^\circ = \ldots.^\circ$

в) $\frac{\pi}{20}\,рад = (\frac{180}{\pi}\cdot\frac{\pi}{20})^\circ = (\frac{180}{20})^\circ = \ldots..^\circ$ г) $\frac{\pi}{3}\,рад = (\frac{180}{\pi}\cdot\ldots.)^\circ = \ldots..^\circ$

Градусы	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	270º	360º
радианы	0									

***Задание*3:** Заполнить таблицу:
***Задание*4:** Решить задачи:

1)Вычислить радиус окружности, если её дуга, длиной $l=7{,}2$см стягивает центральный угол $\alpha=3{,}6$рад.
2) Дуга окружности радиуса $R=3$см стягивает угол $\alpha_{рад}=4{,}5$рад. Найти длину этой дуги l и площадь сектора , ограниченного ею S.
3) Окружность морских компасов делится на 32 равные дуги, называемые румбами. Вычислите градусную и радианную меры румба

***Задание*5:** Заполнить таблицу:

Угол (в рад.)	60^o	45^o		
Угол (в град.)		$\frac{\pi}{4}$		4
Радиус (в см.)		$\frac{4}{\pi}$	6	
Длина дуги (в см.)		1	3	
Площадь сектора (в см^2)		$\frac{2}{\pi}$		50

Практическая работа № 12
Тема: Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение
Цель: Научится вычислять, преобразовывать тригонометрические выражения используя основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Теоретический материал
Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z,$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \; ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} \; \sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Тригонометрические формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}, \; tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha},$$

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

$$1+\mathrm{tg}^2\,\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Формулы двойных и половинных углов.

$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$1-\cos\alpha=2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$1+\cos 2\alpha=2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\quad \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Пример: Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=$\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	IIч.	+	-	-	-

Формула 1б)

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = (\cos\alpha \text{ имеет знак} -) = -\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Формула 2) Формула 3)

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$ ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

Ответ: cosα=$\frac{4}{5}$,tgα=-$\frac{3}{4}$,ctgα=$-\frac{4}{3}$

Ход работы

1. Прочитайте и запомните основные тригонометрические формулы
2. Изучите алгоритм решения, рассмотрев пример
3. Выполните заданияпо вариантам

Вариант 1

Задание 1: Перепишите пример и закончите решение

Вычислить cosα,tgα,ctgα, если sinα=-$\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	IVч.	-	+	-	-

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = (\cos\alpha \text{ имеет знак} +) = +\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -.....$ ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{....}{...} = -.....$

Ответ: cosα=$\frac{3}{5}$,tgα=-…,ctgα=-….

2.tgα=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{....}{......} = -.....$

3. Найти остальные тригонометрические функции, если:

cosα=-$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

4.Дано $cosx = \frac{3}{5}, \ x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right).$

Найти $cos2x,$

5. Упростите выражения;

а) $\sin 20^0 \cos 40^0 + \cos 20^0 \sin 40^0$;

б) $\sin 45^0 \cos 15^0 - \cos 45^0 \sin 15^0$;

6. Вычислите:

$а). \sin\frac{7\pi}{3}, \quad б). \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right),$

$в). tg\left(-\frac{13\pi}{6}\right), \quad г). ctg 13{,}5\pi$

$д). 2\sin 870^0 + \sqrt{12}\cos 570^0 - tg^2 60^0.$

7. Упростите:
$ctgt \cdot \sin(-t) + \cos(2\pi - t)$

8. Известно, что: $\sin t = \frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < t < \pi$.
Вычислить $\cos t,\ tgt,\ ctgt$.

9. Докажите тождество: $\frac{ctgt}{tgt + ctgt} = \cos^2 t$.

10. Вычислите:
$а). \ \sin 58^0 \cos 13^0 - \cos 58^0 \sin 13^0;$

$б). \ \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

Вариант 2
Задание 1.Перепишите пример и закончите решение
Вычислить sinα,tgα,ctgα, если cosα=-0,6, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Решение:
Определим знак:

интервал	четверть	Знак sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	IIIч.	-	-	+	+

Формула 1а)
$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = (\sin\alpha имеетзнак-) = -\sqrt{1-(-0{,}6)^2} = -\sqrt{1-0{,}36} = -\sqrt{0{,}64} = -....$

2. ctgα=$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{....}{...} = -.....$

3. Найти остальные тригонометрические функции, если:
sinα=0,6 $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

4. Дано. $\cos x = \frac{3}{5}, \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right).$
Найти: $\sin 2x.$

5. Упростите выражения;
а) $\cos 12^0 \cos 18^0 - \sin 12^0 \sin 18^0$;
б) $\cos 98^0 \cos 8^0 + \sin 98^0 \sin 8^0$;

6. Вычислите:
$а). \sin\frac{9\pi}{4}, \quad б). \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right),$

$в). tg\left(-\frac{7\pi}{6}\right), \quad г). ctg\frac{5\pi}{4}$

$д). 4\sin^2 120^0 - 2\cos 600^0 + \sqrt{27} tg 660^0.$

7. Упростите:
$tgt \cdot \cos(-t) + \sin(\pi + t)$

8. Известно, что:

$\sin t = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < t < \pi$.

Вычислить $\cos t$, tgt, $ctgt$.

9). Докажите тождество:

$$\frac{tgt}{tgt + ctgt} = \sin^2 t.$$

10. Вычислите

a). $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{10}$;

$б$). $\cos 78^0 \cos 108^0 + \sin 78^0 \sin 108^0$

Практическая работа №13

Тема: Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Цель**:** сформировать умение применять формулы к решению задач по изучаемой теме.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Ход работы:

Рассмотрите теоретический материал по теме. Сделать краткие записи в тетради

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Формулы преобразования суммы и разности в произведение

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

5) $tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

6) $ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Формулы половинного аргумента

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

3) $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

4) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5) $ctg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

6) $ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Универсальная подстановка через тангенс половинного аргумента

1) $\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 3) $tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

2) $\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ 4) $ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$

Формулы преобразования произведения в сумму (разность)

1) $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$

3) $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

4) $tg\alpha\cdot tg\beta = \frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$

5) $ctg\alpha\cdot ctg\beta = \frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Преобразуйте в произведение:

А) $\mathrm{Cos}50^0 + \mathrm{Cos}20^0$;

Б) $\mathrm{Sin}2\alpha - \mathrm{Sin}10\alpha$.

2. Упростите:

А) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$;

Б) $\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

3. Найти $sin\alpha$ и $cos\alpha$, если известно, что $tg\frac{\alpha}{2} = 5$.

4. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}, 2\pi <$

Вариант 2

1. Преобразуйте в произведение:

А) $\mathrm{Sin}12^0 + \mathrm{Sin}20^0$;

Б) $\mathrm{Cos}6\alpha - \mathrm{Cos}3\alpha$.

2. Упростите:

А) $\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$;

Б) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.

3. Найти $sin\alpha$ и $cos\alpha$, если известно, что $tg\frac{\alpha}{2} = 2$.

4. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \frac{1}{4}, -\frac{\pi}{3} <$

$\alpha < 3\pi$ $\alpha < \frac{\pi}{3}$

Практическая работа №15

Тема: Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

Цель**:** сформировать умение применять формулы к решению задач по изучаемой теме.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Порядок выполнения работы:

Рассмотрите теоретический материал по теме. Сделать краткие записи в тетради

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

Поскольку тригонометрические функции периодичны, то обратные к ним функции не однозначны. Так, уравнение $y = \sin x$, при заданном y ($-1 \le y \le 1$), имеет бесконечно много корней. Действительно, в силу периодичности синуса, если x такой корень, то и $x + 2\pi n$ (где n целое) тоже будет корнем уравнения. Таким образом, обратные тригонометрические функции многозначны. Чтобы с ними было проще работать, вводят понятие их главных значений. Например, если для синуса $y=\sin x$, если ограничить аргумент x интервалом, то на этом интервале функция $y= \sin x$ монотонно возрастает.

Поэтому она имеетоднозначную обратную функцию, которую называют *арксинусом:* $x = \arcsin y$.

Если особо не оговорено, то под обратными тригонометрическими функциями имеют в виду их главные значения, которые определяются следующими определениями.

Арксинус ($y = \arcsin x$) – это функция, обратная к синусу ($x = \sin y$), имеющая область определения и множество значений .

*Арккосину*с ($y = \arccos x$) – это функция, обратная к косинусу ($x= \cos y$), имеющая область определения и множество значений .

Арктангенс ($y = \operatorname{arctg} x$) – это функция, обратная к тангенсу ($x = \operatorname{tg} y$), имеющая область определения и множество значений .

Арккотангенс ($y = \operatorname{arcctg} x$) – это функция, обратная к котангенсу ($x= \operatorname{ctg} y$), имеющая область определения $-\infty < x < +\infty$и множество значений $0 < y < \pi$.

Графики обратных тригонометрических функций получаются из графиков тригонометрических функций зеркальным отражением относительно прямой y = x.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	Вариант 2
Вычислите:	
1. $\arcsin 0 - \arccos 0$;	1. $\arcsin 1 - \arccos(-1)$;
2. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;	2. $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $\frac{2}{\pi}\arcsin(-1) - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$;	3. $\frac{1}{\pi}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\arccos 1$;
4. $\arccos 1 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;	4. $\arccos(-1) - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
5. $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;	5. $\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
6. $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;	6. $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
7. $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$;	7. $\arccos\left(tg\frac{\pi}{4}\right)$;
8. $tg\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.	8. $\sin(\arccos 0)$.
Вычислите:	

$arctg\sqrt{3} - arctg1 + arccrg\left(-\sqrt{3}\right)$; $tg\left(arcctg\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $arcctg\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$	$arcctg\left(-1\right) + arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3} - arccrg0$; $ctg\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $arctg\left(\cos\pi\right)$

Практическая работа № 16
Тема: Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств
Цель: Научиться решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник, таблица тригонометрических функций

Теоретический материал
<u>Опр.</u>
Уравнение называется тригонометрическим, если неизвестная величина входит в него как аргумент тригонометрической функции.

Решение тригонометрических уравнений

Уравне-ние	a	Формулы решений	Частные случаи
$\sin x = a$	$\lvert a\rvert > 1$	Нет решений	—
	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \times \arcsin a + \pi k, k \in z$	$\sin x = 0$; $x = \pi k, k \in z$
			$\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z$
			$\sin x = -1$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in z$
$\cos x = a$	$\lvert a\rvert > 1$	Нет решений	—
	$\lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in z$	$\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z$
			$\cos x = 1$; $x = 2\pi n, n \in z$
			$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n, n \in z$
$\mathrm{tg}\, x = a$	a — любое число	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k, k \in z$	—
$\mathrm{ctg}\, x = a$	a — любое число	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, n \in z$	—

Уравнения вида $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx =$а называются простейшими. Для них выведены формулы корней:

$$sinx = a \quad x = \left(-1\right)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = a \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$$

$$tg\ x = a \quad x = arctg\ a + \pi n, n \in Z$$
$$ctg\ x = a \quad x = arctg\ \frac{1}{a} + \pi n, n \in Z$$

Определение. Неравенства, содержащие переменную под знаком тригонометрической функции, называются тригонометрическими.
При решении тригонометрических неравенств используют единичную окружность.
Множество решений неравенства:

sin*x* ≥ *a*
$\arcsin a + 2\pi k \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi k$

sin*x* ≤ *a*
$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \le x \le \arcsin a + 2\pi k$

cos*x* ≥ *a*
$2\pi k - \arccos a \le x \le 2\pi k + \arccos a$

cos*x* ≤ a
$2\pi k + \arccos a \le x \le 2\pi k$

tgx ≥ a
$arctg\ a + \pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + \pi k$

tg*x* ≤ *a*
$-\frac{\pi}{2} + \pi k \le x \le arctg\ a + \pi k$

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал

1. Решить тригонометрическое уравнение по аналогии

$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

Решение:

$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ (разделим на то, что стоит перед знаком «=», т.е. на cosx)

$$\frac{3\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x} = 0$$

$3tgx + \sqrt{3} = 0$

$3tgx = -\sqrt{3}$

$tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \pi n, n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$

2) $\sin x - \cos x = 0$

3) $4\sin x + 12\cos x = 7$;

4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$;

5) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$

3. Решите уравнения, с подробным решением

Вариант 1, решает задание под четными числами, Вариант 2 - нечетными

1) $\sin 3x = 0$; 2) $\cos 4x = 1$; 3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$; 4) $2\sin\frac{x}{3} = 1$;

5) $\cos 5x + 1 = 0$; 6) $3\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{2x}{3} = 0$; 8) $1 - \sin\frac{x}{3} = 0$;

9) $\sqrt{3} - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 10) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{3}$; 11) $\sin^2 x = 1$;

12) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 13) $\cos\frac{x}{2} = 0$; 14) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 15) $\sin 4x = -1$;

16) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$; 17) $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 18) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Решите неравенства

Вариант 1. Решить неравенства: 1) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x > -\sqrt{3}$ 5) $\sin 3x > -\frac{1}{2}$	**Вариант 2.** **Решить неравенства:** 1) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \geq \frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\sqrt{3}$ 5) $\sin 3x < -\frac{1}{2}$

Практическая работа № 18
Тема: Определение функций. Построение и чтение графиков функций. Исследование функции.
Цель: Научиться исследовать функцию
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал
Опр.
Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать её аргумент (переменная x)
Опр.
Если функция задана формулой, то принято считать, что она определена при всех тех значениях аргумента, при которых эта формула имеет смысл, т.е выполнимы все действия, указанные в выражении, стоящем в правой части формулы.
Опр.
Множеством значений функции называется множество всех значений, которые принимает функция (переменная y)
*Пример*Найти область определения функции $y = \sqrt{x+1}$
Решение: обл. опр. $x + 1 \geq 0$
$x \geq -1$
Ответ: $D(y)$: $x \geq -1$
Опр.
Функция $y = f(x)$ называется чётной, если для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$
Опр.
Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$
Пример. Определить, является ли функция чётной или нечётной $f(x) = x \cdot \sin x$

Решение $f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)=-x\cdot(-\sin x)=x\cdot\sin x=f(x)\Rightarrow f(x)-$ чётная

Опр.

Функция *y = f(x)* называется периодической, если существует такое число Т ≠ 0, что для любого х из области определения этой функции выполняется равенство *f(x-T) = f (x) = f (x + T).* Число Т называется периодом функции *f(x).*

Пример Доказать, что функция $f(x)=\sin 3x$ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{3}$

Доказательство: $f(x+T)=f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x=f(x)\Rightarrow$

функция периодическая

Ход работы:

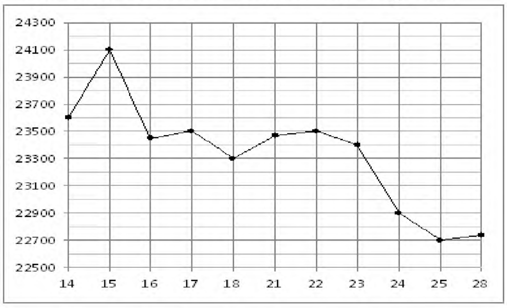
1. Прочитать теоретический материал
2. Выполнить задания по вариантам

1 вариант.

1. Найти область определения функции: а) $y=\frac{1}{x+2}$ б) $y=\sqrt[4]{x^2-7x+10}$
2. Доказать, что функция периодическая с периодом Т: $y = \sin 2x$, $T = \pi$
3. Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной: $y = x\cdot \sin x$
4. Построить график функции, заданной : а) формулой $y=\begin{cases} x^2+4, \text{ если } x\le 1 \\ 5, \text{ если } x>1 \end{cases}$

б) описанием: *Д* (f) = [1; 7] , f(7) = 1, $f(x) = x^2$ при $1\le x\le 2$, y = f(x) убывает на промежутке $2 < x \le 7$

5. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.

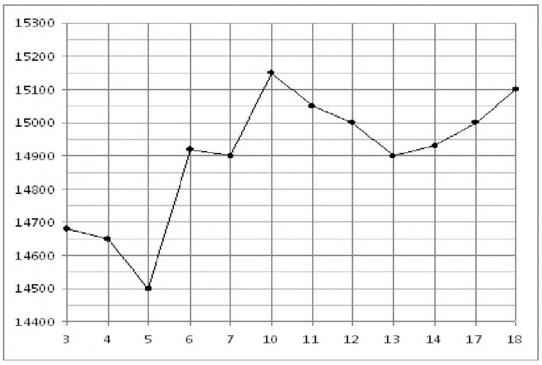


2 вариант.

1. Найти область определения функции: а) $y=\frac{1}{x-3}$ б) $y=\sqrt[4]{x^2+4x-5}$
2. Доказать, что функция периодическая с периодом Т: $y=\cos\frac{x}{2}$, $T = 4\pi$
3. Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной: $y = x + \sin x$
4. Построить график функции, заданной : а) формулой $y=\begin{cases} 1-x^2, \text{ если } x\le 1 \\ -3, \text{ если } x>1 \end{cases}$

б) описанием: *Д* (f) = [-3; 3] , E(f) :f(x) < 0 , функция чётная, возрастает при x < 0, убывает при $x \ge 0$

5. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

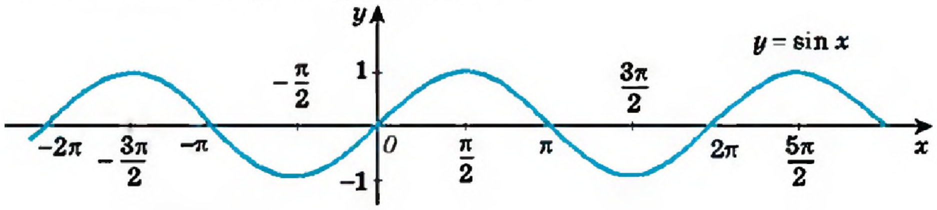


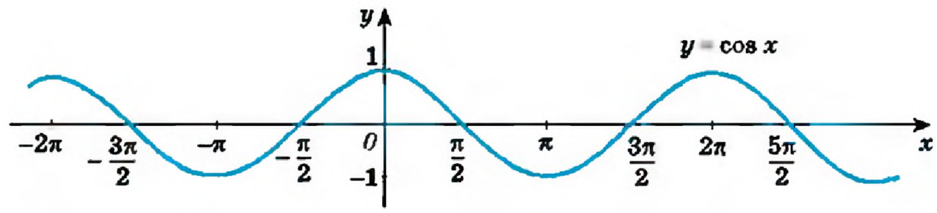
Практическая работа №20
Тема: Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
Цель: изучить свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

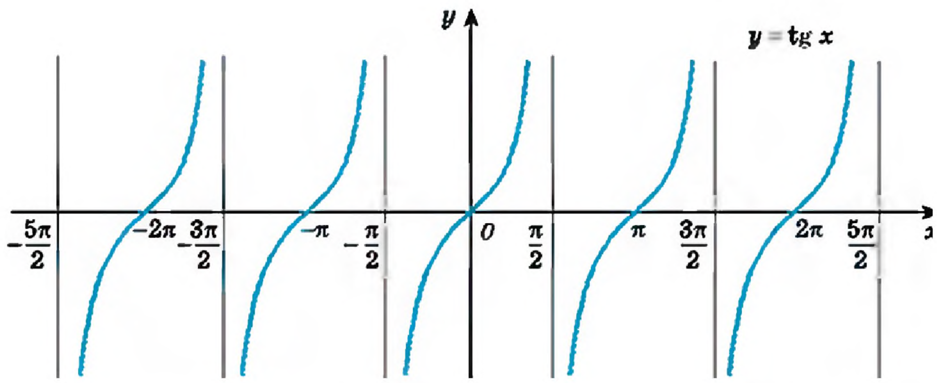
	Функция			
	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$
1.1	R	R	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$(\pi n; \pi + \pi n)$
1.2	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R	R
2.1	Нечетная	Четная	Нечетная	Нечетная
2.2	2π	2π	π	π
3.1	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$
3.2	$(0; 0)$	$(0; 1)$	$(0; 0)$	Нет
4.1	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
4.2	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
5.1	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	Нет
5.2	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	Нет	$(\pi n; \pi + \pi n)$
6.1	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$	Нет	Нет
6.2	-1	-1	Нет	Нет
6.3	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$2\pi n$	Нет	Нет
6.4	1	1	Нет	Нет

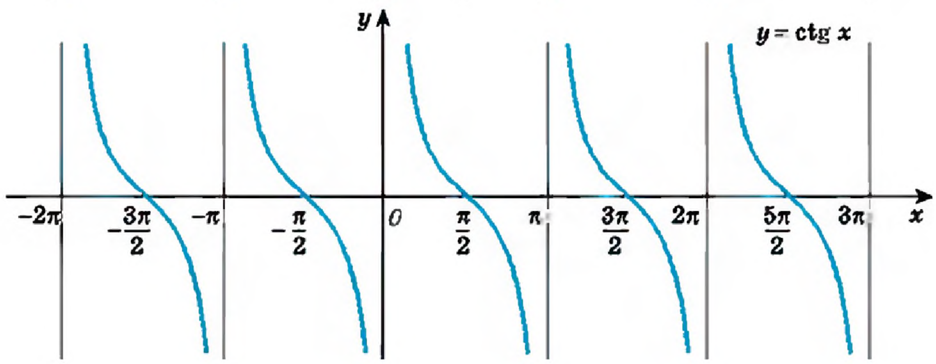
1.1 — область определения;
1.2 — область значений;
2.1 — четность (нечетность);
2.2 — наименьший положительный период;
3.1 — координаты точек пересечения графика f с осью Ox;
3.2 — координаты точек пересечения графика f с осью Oy;

4.1 — промежутки, на которых f принимает положительные значения;
4.2 — промежутки, на которых f принимает отрицательные значения;
5.1 — промежутки возрастания;
5.2 — промежутки убывания;
6.1 — точки минимума;
6.2 — минимумы функции;
6.3 — точки максимума;
6.4 — максимумы функции.









Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
$y=f(kx), 0<k<1$	График функции $y=f(x)$ растягивается от оси OY в $\frac{1}{k}$ раз

y=f(kx),k>1	График функции *y=f(x)* сжимается в k раз к оси *ОУ*.
y=k f(x),0<|k|<1	График функции *y=f(x)* сжимается к оси *ОХ* в k раз
y=k f(x), |k|>1	График функции *y=f(x)* растягивается от оси *ОХ* в k раз.

Ход работы

Изучить теоретический материал
2. Выполнить задания
Задания для самостоятельного решения
Задание. Постройте графики следующих функций.

Вариант 1

1. $y = \frac{1}{2}\cos(x + \frac{\pi}{3})$;
2. $y = 3\log_{\frac{1}{4}}(5x - 2) + 7$
3. $y = |3\sin 2x| - 1$

Вариант 2

1. $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
2. $y = \frac{1}{4}\log_2(3x + 2) - 4$
3. $y = \left|\frac{1}{2}\sin 3x\right| + 2$

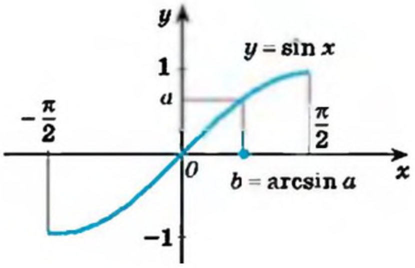
Практическая работа №21
Тема: Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции.
Цель: Познакомиться с обратными тригонометрическими функциями, их свойствами и графиками
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник
Теоретический материал

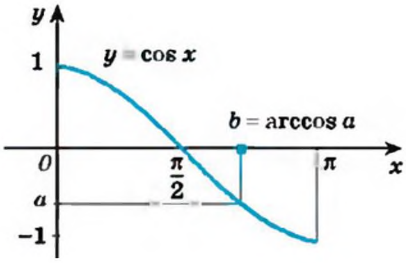
Арксинус числа *a* ($\arcsin a$) – такой угол α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, то есть $\alpha = \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin\alpha = a$.

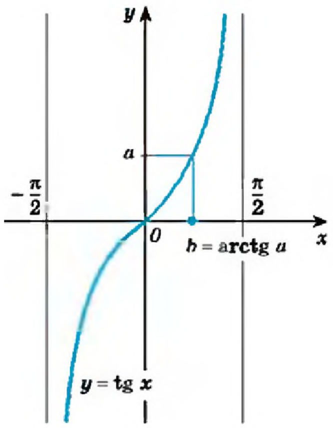
Арккосинус числа *a* ($\arccos a$) – такой угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a, то есть $\alpha = \arccos a \in [0; \pi]$; $\cos\alpha = a$.

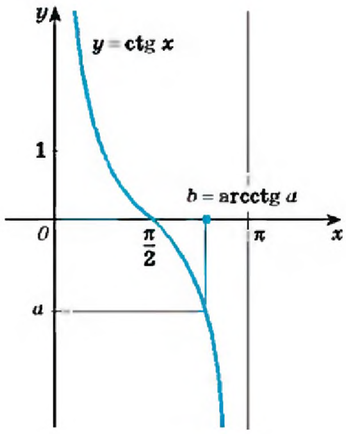
Арктангенс числа *a* ($\mathrm{arctg}\ a$) – такой угол α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, то есть $\alpha = \mathrm{arctg}\, a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\mathrm{tg}\,\alpha = a$.

Арккотангенс числа *a* ($\mathrm{arcctg}\ a$) – такой угол α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a, то есть $\alpha = \mathrm{arcctg}\, a \in (0; \pi)$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = a$.







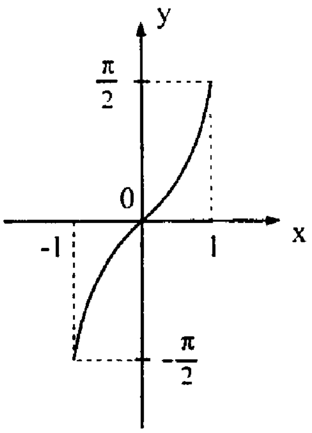


Ход работы

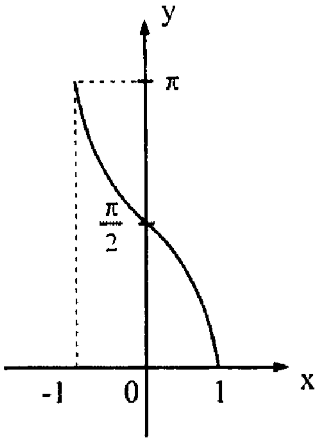
1. Выучите определения обратных тригонометрических функций
2. Посмотрите графики обратных тригонометрических функций
3.Запишите в тетрадь таблицу основных свойств обратных тригонометрических функций

Свойства функции	Функции			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$
Область опреде-ления	$x \in [-1; 1]$	$x \in [-1; 1]$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
Область значений	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [0; \pi]$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$y \in (0; \pi)$
Четность	Нечетная	Ни четная, ни нечетная	Нечетная	Ни четная, ни нечетная
Нули функции ($y = 0$)	При $x = 0$	При $x = 1$	При $x = 0$	$y \neq 0$
Проме-жутки знакопо-стоянст-ва	$y > 0$ при $x \in (0; 1]$ $y < 0$ при $x \in [-1; 0)$	$y > 0$ при $x \in [-1; 1)$	$y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	$y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$
Моно-тонность	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает

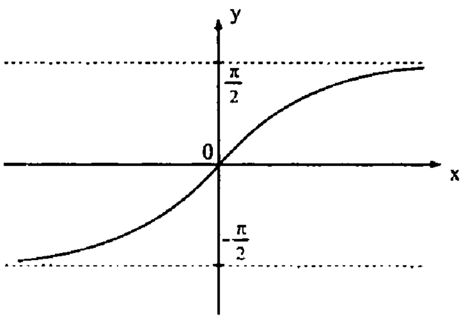
Связь с тригонометрической функцией	$\sin y = x$	$\cos y = x$	$\operatorname{tg} y = x$	$\operatorname{ctg} y = x$
График	а	б	в	г



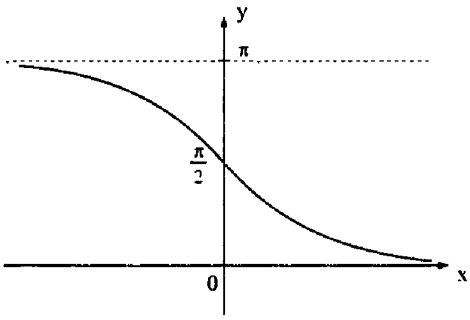
а) $y = \arcsin x$



б) $y = \arccos x$



в) $y = \operatorname{arctg} x$



г) $y = \operatorname{arcctg} x$

4. Посмотрите пример нахождения области определения, запишите в тетрадь

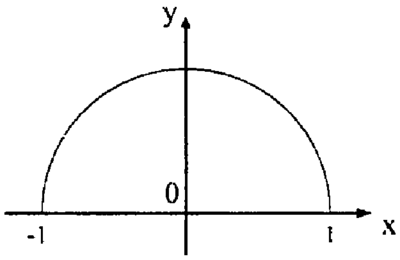
Найти область определения функции $y = \arcsin(2x + x^2)$.

Для того чтобы функция y была определена, необходимо выполнение неравенства $-1 \le 2x + x^2 \le 1$, которое эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} -1 \le 2x + x^2 \\ 2x + x^2 \le 1 \end{cases}$. Решением первого неравенства является промежуток $x \in (-\infty; +\infty)$, второго – $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$. Этот промежуток $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$ и является решением системы неравенств, а следовательно, и областью определения функции $D(y) = [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$.

Разберите пример построения графика функции, запишите в тетрадь

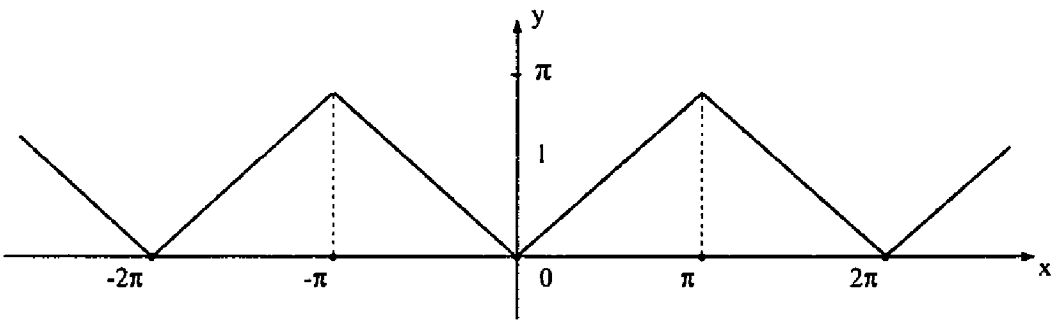
Построить график функции $y = \cos(\arcsin x)$.

Пусть $\alpha = \arcsin x$. Тогда $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $y = \cos\alpha \geq 0$. Учтем, что $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, то есть $x^2 + y^2 = 1$ и ограничения на x ($x \in [-1; 1]$) и y ($y \geq 0$). Тогда графиком функции $y = \cos(\arcsin x)$ является полуокружность.



Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Так как функция $\cos x$ изменяется на отрезке $[-1; 1]$, то функция y определена на всей числовой оси и изменяется на отрезке $[0; \pi]$. Учтем, что $y = \arccos(\cos x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$; функция y является четной и периодической с периодом 2π, учитывая, что этими свойствами обладает функция $\cos x$. Теперь легко построить график.



6. Выполните задания:буква задания соответствует первой, второй букве вашей фамилии. Например Иванов Иван, первач буква и, значит выполняем задание по буквой «и»

1. Найти область определения функции:

а) $y = \cos(\arcsin 3x)$; б) $y = \sin(\arccos 2x)$;

в) $y = \arccos(\sin 5x)$; г) $y = \arcsin(\cos 4x)$;

д) $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$; е) $y = \arccos(\operatorname{ctg} x)$;

ж) $y = \arcsin(2|x| - 3)$; з) $y = \arccos(3|x| - 2)$;

и) $y = \arcsin\frac{2x-1}{x+1}$; к) $y = \arccos\frac{x-3}{2x-1}$;

л) $y = \arcsin(x^2 - x - 1)$; м) $y = \arccos(x^2 + x + 1)$.

2. Найти область значений функции:

а) $y = \arcsin(3x-2)$; б) $y = \arccos(3-2x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(1-2|x|)$; г) $y = \operatorname{arcctg}(4|x|-1)$;

д) $y = \operatorname{arctg}(\cos x)$; е) $y = \operatorname{arcctg}(\sin x)$;

ж) $y = \arcsin\sqrt{x}$; з) $y = \arccos\dfrac{1}{x^2+1}$;

и) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+1}$; к) $y = \arcsin\dfrac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+2}$.

3. Постройте графики функций:

а) $y = \arcsin(x-3)$; б) $y = \arccos(x+2)$; в) $y = \sin(\arcsin x)$;

г) $y = \cos(\arccos x)$; д) $y = \sin(\arccos x)$; е) $y = -\cos(\arcsin x)$;

ж) $y = \arcsin(\sin x)$; з) $y = \arccos(\cos x)$; и) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

к) $y = \sin(2\operatorname{arctg} x)$; л) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1-x))$;

м) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+1}{2x}$; н) $y = \arccos\dfrac{1}{x^2}$.

Практическая работа № 22

Тема: Преобразования графика функции. Гармонические колебания. Прикладные задачи.

Цель: Посмотреть примеры преобразования графиков тригонометрических функций, научиться решать примеры преобразования графика функций

Количество часов: 2

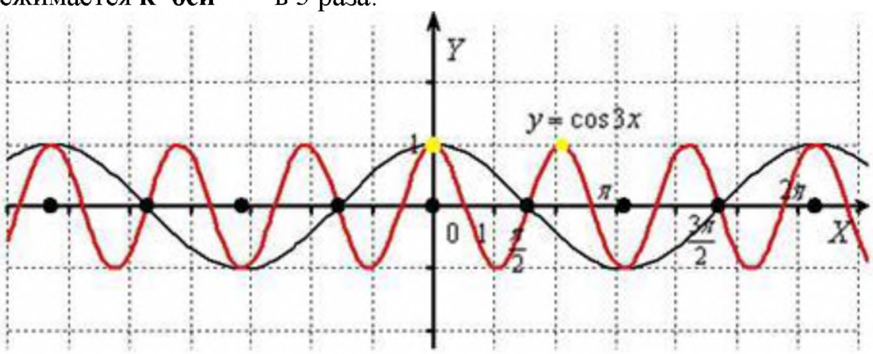
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, линейка, карандаш

Теоретический материал:

Пример 1

Построить график функции $y = \cos 3x$

сжимается **к оси** OY в 3 раза:



Итоговый график $y = \cos 3x$ проведён красным цветом.

Исходный период $T = 2\pi$ косинуса закономерно уменьшается в три раза: $T = \dfrac{2\pi}{3}$ (отграничен жёлтыми точками).

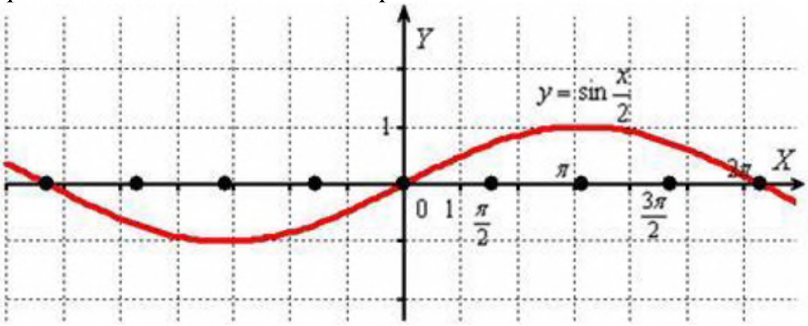
Растяжение графика функции от оси ординат

Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $0<k<1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть от оси** OY в $\frac{1}{k}$ раз.

Пример 3

Построить график функции $y=\sin\frac{x}{2}$

растягиваем **от оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y=\sin\frac{x}{2}$ получается путём **растяжения** графика $y=\sin x$ **от оси ординат** в два раза.

Пример 4

Построить график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

График синуса $y=\sin x$ сдвинем вдоль оси вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ **влево**:

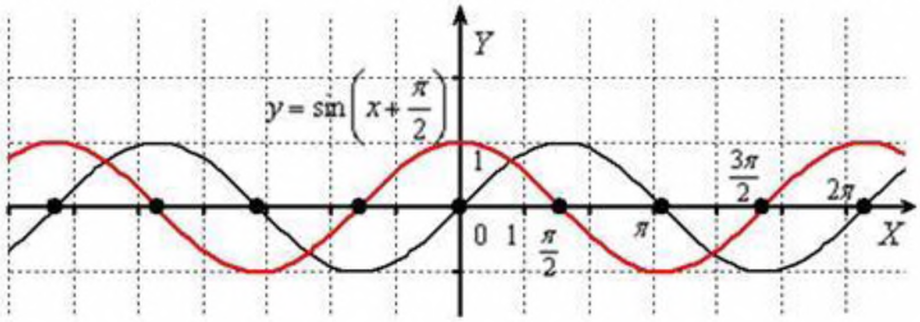


График функции $y=\cos x$ получается путём сдвига синусоиды $y=\sin x$ вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ единиц

Аргумент функции необходимо представить в виде $f(kx+b)=f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)$ и последовательно выполнить следующие преобразования:

1) График функции $f(x)$ сжимаем (или растягиваем) к оси (от оси) ординат: $f(kx)$ (если $k<0$, то график дополнительно следует отобразить симметрично относительно оси OY).

2) График полученной функции $f(kx)$ сдвигаем влево (или вправо) вдоль оси абсцисс **на** $\frac{b}{k}$ **(!!!) единиц**, в результате чего будет построен искомый график $f(kx+b)$.

Пример 5

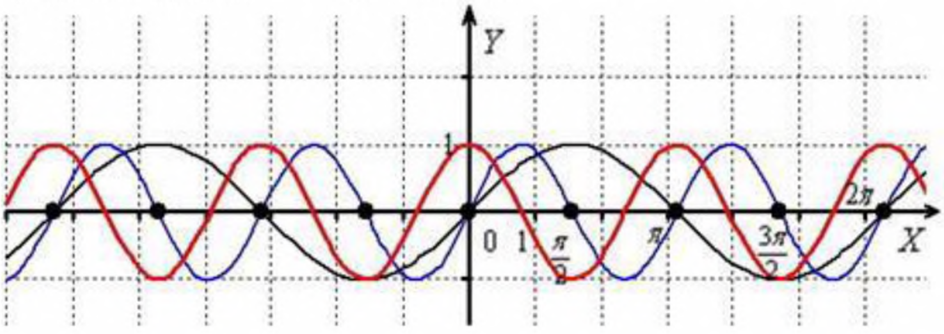
Построить график функции $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Представим функцию в виде $y = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ и выполним следующие преобразования:

синусоиду $y = \sin x$

1) сожмём **к оси** OY в два раза: $y = \sin 2x$

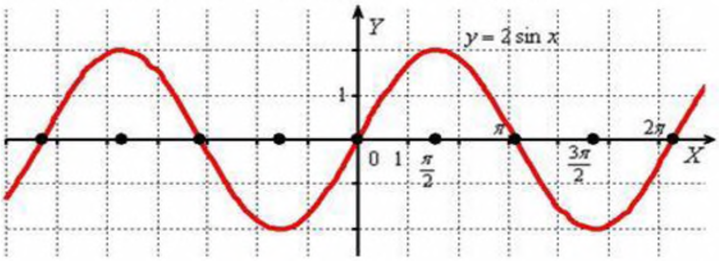
2) сдвинем вдоль оси OX **на** $\frac{\pi}{4}$ **влево**: $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$



Пример 6

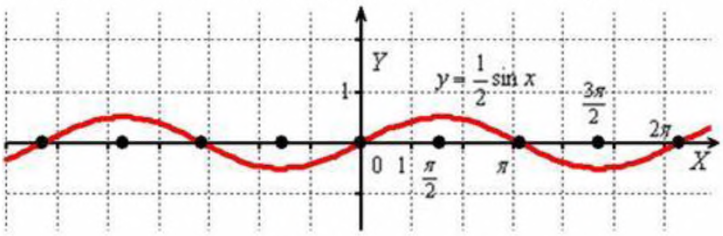
Построить графики функций $y = 2\sin x, \quad y = \frac{1}{2}\sin x$.

И **вытягиваем** её **вдоль оси** OY в 2 раза:



Период функции $y = 2\sin x$ не изменился и составляет $T = 2\pi$, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается: $E(y) = [-2;2]$.

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси** OY в 2 раза:

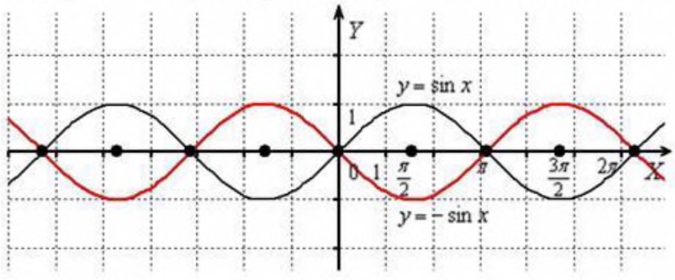


Аналогично, период $T = 2\pi$ не изменился, но область значений функции изменилась в два раза: $E(y) = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Пример 7

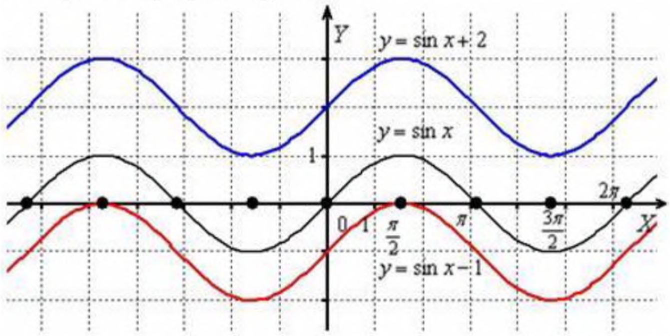
Построить график функции $y = -\sin x$

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси OX :



Пример 15

Построить графики функций $y = \sin x + 2, \quad y = \sin x - 1$.



Комбинационное построение графика $mf(x)+h$ в общем случае осуществляется очевидным образом:

1) График функции $f(x)$ растягиваем (сжимаем) вдоль оси OY . Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси OX .

2) Полученный на первом шаге график $mf(x)$ сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы h .

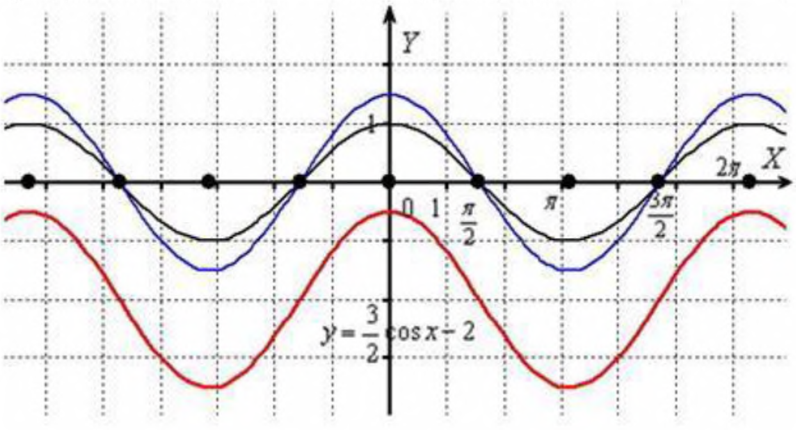
Пример 16

Построить график функции $y = \frac{3}{2}\cos x - 2$

График косинуса $y = \cos x$ (чёрный цвет):

1) Растягиваем вдоль оси OY в 1,5 раза: $y = \frac{3}{2}\cos x$ (синий цвет);

2) Сдвигаем вдоль оси OY на 2 единицы вниз: $y = \frac{3}{2}\cos x - 2$:



2. Гармонические колебания. Величины, меняющиеся согласно закону

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

или

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

играют важную роль в физике. По такому закону меняется координата шарика, подвешенного на пружине (рис. 149). Говорят, что шарик совершает *гармонические колебания*.

Функцию (2) тоже можно записать в виде (1):

$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Параметры A, ω и φ, полностью определяющие колебание (1), имеют специальные названия: A называют *амплитудой колебания*, ω — *циклической* (или круговой) *частотой колебания*, φ — *начальной фазой колебания* (обычно берут $\varphi \in [0; 2\pi)$). Период функций $A\sin(\omega t + \varphi)$ и $A\cos(\omega t + \varphi)$, равный $\frac{2\pi}{\omega}$, называют *периодом гармонического колебания*.

Ход работы

1. Прочитать теоретическийматериал
2. Аналогично построенным графикам функций, построить графики следующий функций:

Вариант 1- а, е, з, к. Вариант 2 - б, г, в, д, Вариант 3- ж, и, л, м

а) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

в) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

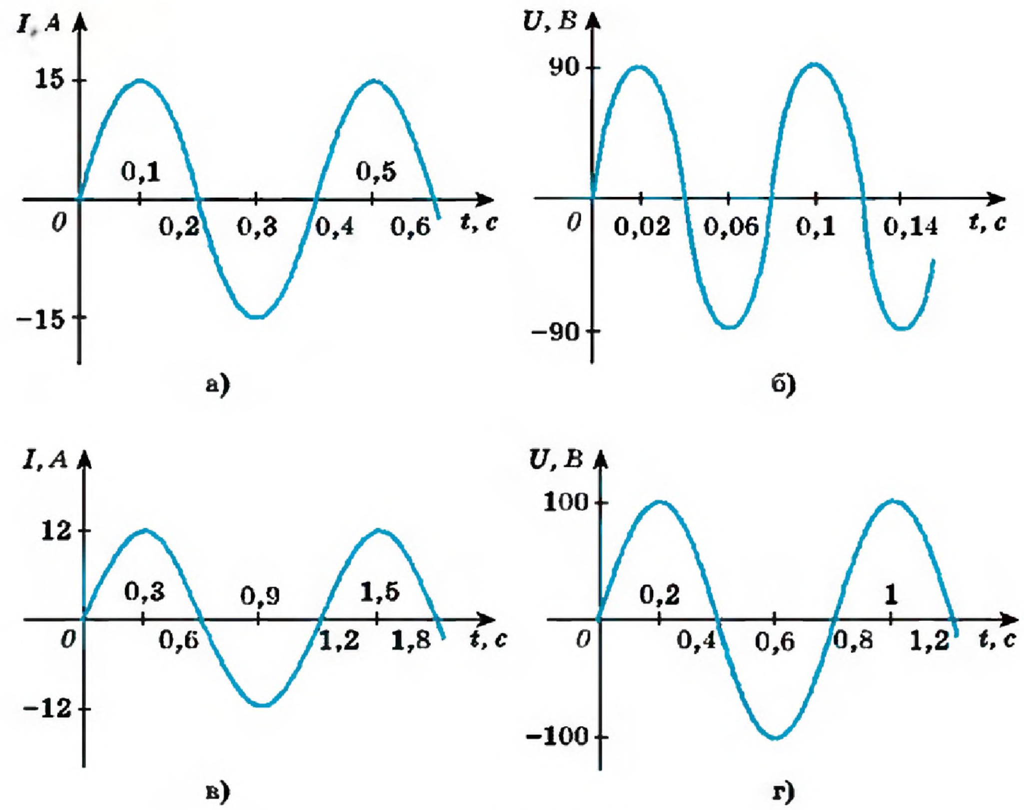
д) $y = \cos 2x$ ж) $y = \cos x - 1$

е) $y = tg\frac{x}{2}$ з) $y = |\sin x|$

и) $y = \cos\frac{x}{2}$ л) $y = 2\sin x$

к) $y = ctg\frac{x}{2}$ м) $y = \sin x - 1$

3. По графику, изображенному на рисунке, определите амплитуду силы тока (или напряжения), период колебания. Запишите закон зависимости силытока (или напряжения) от времени



4. В какой ближайший момент времени $t \quad (t > 0)$ читая от начала движения, смещение точки, совершающей гармонические колебания по закону $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

а) максимально; б) равно 2,5;

в) равно 0; г) равно −5?

Практическая работа №24

Тема: Способы задания числовой последовательности, вычисления членов последовательности

Цель: способствовать усвоению понятий числовая последовательность; способы задания числовой последовательности; уметь различать различные способы задания числовых последовательностей..

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, линейка, карандаш

Ход работы

Ответить на теоретические вопросы:

а) что называется алгебраической последовательностью?

б) что называется геометрической последовательность.

в) запишите основные расчетные формулы алгебраической и геометрической последовательности?

Рассмотрите теоретический материал по теме сделать запись в тетрадь

Изучить условие заданий для практической работы. Оформите отчет по работе.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ или (y_n).

В данном случае независимая переменная – натуральное число.

Способы задания числовой последовательности.

Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

Пример 1. Последовательность простых чисел: 2,3,5,7,11, 3, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39, ...

Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

Аналитический способ.
Любой n-й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.
Пример 1. Последовательность чётных чисел: $y = 2n$.
Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел: $y = n^2$;
$1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ...$.
Пример 3. Последовательность $y = 2^n$;
$2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^n, ...$.
Рекуррентный способ.
Указывается правило, позволяющее вычислить n-й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.
Пример 1. Арифметическая прогрессия: $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$, где a и d – заданные числа, d - разность арифметической прогрессии. Пусть $a_1=5$, $d=0{,}7$, тогда арифметическая прогрессия будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5; ... .
Пример 2. Геометрическая прогрессия: $b_1= b$, $b_{n+1}= b_n q$, где b и q – заданные числа, $b \neq 0$, $q\neq 0$; q – знаменатель геометрической прогрессии. Пусть $b_1=23$, $q=½$, тогда геометрическая прогрессия будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875; ... .
Пример 3. Последовательность Фибоначчи. Эта последовательность легко задаётся рекуррентно: $y_1=1$, $y_2=1$, $y_{n-2}+y_{n-1}$, если n=3, 4, 5, 6, ... Она будет иметь вид:
1, 1,2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (y_n), если последовательность имеет вид: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: $y_1=1$, $y_2=3$, $y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,4 и разностью 0,9.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 3,5 и знаменателем $-\frac{2}{3}$.
5. В арифметической прогрессии $a_5= -150$, $a_6= -147$. Найдите номер первого положительного элемента этой последовательности.
6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии 22,7; 21,4; ... .

Вариант 2.

1. Составьте возможную формулу n-го элемента последовательности (y_n), если последовательность имеет вид: 7, 11, 15, 19, 23, ...
2. Выписать первые десять элементов последовательности заданной рекуррентно: $y_1=0$, $y_2=1$, $y_n=2y_{n-2}+y_{n-1}$.
3. Найдите формулу n-го элемента и сумму первых 15 элементов арифметической прогрессии с первым элементом 3,5 и разностью 0,8.
4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 4,5 и знаменателем $-\frac{2}{3}$.
5. В арифметической прогрессии $a_6= 160$, $a_6= 156$. Найдите номер первого отрицательного элемента этой последовательности.
6. Укажите наиболее близкий к нулю элемент арифметической прогрессии
   -15,1; -14,4; ... .

Практическая работа № 25
Тема: Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия
Цели: Научиться вычислять геометрическую прогрессию
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник
Теоретический материал

Если (bn) - бесконечная геометрическая прогрессия, у которой | q | 1, то сумма всех ее членов S

вычисляется по формуле $\boxed{S = \dfrac{b_1}{1-q}}$

Пример 1. Найдем сумму бесконечной геометрической прогрессии (bn): 6; -2; ... .
Решение

По условию b1 = 6; b2 = -2, следовательно, q = $\dfrac{b_2}{b_1}$ = $-\dfrac{1}{3}$. Имеем геометрическую прогрессию, у которой | q | 1. По формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ находим:

$$S = \frac{6}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{6 \cdot 3}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Ответ; 4,5.

Пример 2. Запишем число 0,(7) в виде обыкновенной дроби.
Решение
Запись 0,(7) означает бесконечный периодический дробь 0,7777....

Его можно представить как бесконечную сумму $\dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \ldots$.
Слагаемые этой суммы являются членами бесконечной геометрической прогрессии, у которой b1 = $\dfrac{7}{10}$, q = $\dfrac{7}{100} : \dfrac{7}{10} = \dfrac{1}{10}$, | q | 1. Тогда эта сумма равна:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{10} : \frac{9}{10} = \frac{7}{9}$$

. Поэтому 0,(7) = $\dfrac{7}{9}$.

Ответ: $\dfrac{7}{9}$.

Ход работы

Прочитайте теоретический материал
Посмотрите примеры нахождения геометрической прогрессии
3. Выполните задания, используя формулы геометрической прогрессии

1.$\{в_п\}$ – геометрическая прогрессия, найдите $в_6$, если $в_1 = 4, q = \frac{1}{2}$
2.Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 12; 6;…
3.$\{в_п\}$ – геометрическая прогрессия, найдите S_5, если $в_1 = 625, q = \frac{1}{5}$
4.Вычислите S_4, если $\{в_п\}$ геометрическая прогрессия, $в_1 = 1, q = 3$
5.Найдите 8-й член геометрической прогрессии $\{в_п\}$, если $в_1 = 32, q = \frac{1}{2}$
6. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $в_1 = 2, q = 0{,}875$
7. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 9; -3; 1;…
8. Дана геометрическая прогрессия $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; .... Найдите соотношение $\frac{в_6}{в_4}$.
9. Найдите сумму членов геометрической прогрессии 8; 4; …
10. Найдите третий член геометрической прогрессии, если $S_4 = 80, \quad q = 3$

4.Выполните задания по вариантам
В следующих заданиях обведите кружком букву, соответствующую варианту правильного ответа.

Вариант 1

1. Найдите седьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -8$ и $q = 2$.

а) 1024; б) 512; в) –512; г) –1024

2. Первый член геометрической прогрессии равен –4, а знаменатель прогрессии равен –2. Найдите сумму семи первых членов этой прогрессии.

а) –172; б) 172; в) 129; г) –129

3. В геометрической прогрессии (b_n), $b_4 = 40{,}6$ и $b_9 = 1299{,}2$. Найдите формулу n-го члена.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 27, –9,3, ...

а) $13\frac{1}{2}$ б) $6\frac{3}{4}$ в) $40\frac{1}{2}$ г) $20\frac{1}{4}$

5. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, если $b_2 = 0{,}08$, $b_4 = 1{,}28$ и известно, что знаменатель прогрессии является положительным числом.

а) $27\frac{3}{10}$ б) $16\frac{19}{50}$ в) $6\frac{41}{50}$ г) $27\frac{3}{10}$

6. Геометрическая прогрессия задаётся формулой: $b_n = 4 * (-2)^{n-1}$. Найдите S_8.

а) 340; б) 85; в) –340; г) –85

7. Для периодической дроби 0,(27) найдите несократимую обыкновенную дробь. Запишите разность числителя и знаменателя.

а) 8; б) 9; в) 7; г) 10

8. Известно, что (b_n) – геометрическая прогрессия, $b_1 = 3$, $q = 2$. Какой цифрой оканчивается b_{16}?

а) 2; б) 4; в) 6; г) 8

9. В 1998 г. население улуса составляло 17 тыс. человек. Ежегодно оно увеличивалось в 1,1 раза. Сколько жителей будет в улусе в 2001 году, если эта тенденция сохранится?

а) 22627; б) 20570; в) 22000; г) 24890

Вариант 2.

В следующих заданиях обведите кружком букву, соответстующую варианту правильного ответа.

1. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -6$ и $q = \frac{1}{3}$.

а) $\frac{2}{27}$ б) $-\frac{2}{27}$ в) $\frac{2}{81}$ г) $-\frac{2}{81}$

2. Первый член геометрической прогрессии равен –3, а знаменатель прогрессии равен –2. Найдите сумму семи первых членов этой прогрессии.

а) 127; б) –129; в) 129; г) –127

3. В геометрической прогрессии (b_n), $b_4 = 30{,}5$ и $b_9 = 976$. Найдите формулу n-го члена.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 32, –8, 2, ...

а) $10\frac{2}{3}$ б) $42\frac{2}{3}$ в) $25\frac{3}{5}$ г) $20\frac{3}{5}$

5. Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии, если $b_2 = 0{,}08$, $b_4 = 0{,}32$ и известно, что знаменатель прогрессии является положительным числом.

а) $-2\frac{13}{25}$ б) $-5\frac{2}{25}$ в) $2\frac{13}{50}$ г) $5\frac{2}{25}$

6. Геометрическая прогрессия задаётся формулой: $b_n = 2 * (-3)^{n-1}$. Найдите S_6.

а) 365; б) –364; в) 364; г) –365

7. Для периодической дроби 0,(21) найдите несократимую обыкновенную дробь. Запишите разность числителя и знаменателя.

а) 26; б) 33; в) 78; г) 57

8. Известно, что (b_n) – геометрическая прогрессия, Какой цифрой оканчивается b_{13}?

а) 2; б) 4; в) 6; г) 8

9. В 1996 г. население улуса составляло 15 тыс. человек. Ежегодно оно увеличивалось в 1,2 раза. Сколько жителей будет в улусе в
2000 году, если эта тенденция сохранится?
а) 30104; б) 25920; в) 31104; г) 37325

Практическая работа № 26
Тема: Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций
Цель: Применение знаний дифференцирования при решении задач.
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник
Теоретический материал
*Опр.*Производной функции f(x) в точке x называется предел разностного отношения
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

*Опр.*Операция нахождение производной называется дифференцированием.
Это правило является основным, т.к. выведено из самого определения. Однако при дифференцировании сложных функций, суммы, произведения, частного применение общего правила представляет большие трудности. Поэтому применяют правила дифференцирования.
Правила
1. $(f'(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$ - Производная суммы равна сумме производных.
2. $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ - Постоянный множитель можно вынести за знак производной.
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ - Производная произведения.
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ Производная частного

Формулы дифференцирования

$C'=0$

$(x)'=1$

$(x^2)'=2x$

$(x^3)'=3x^2$

$(x^p)'=p\,x^{p-1}$

$(e^x)'=e^x$

7. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

8. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

9. $(kx+b)'=k$

10. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

11. $(\sin x)'=\cos x$

12. $(\cos x)'=-\sin x$

13. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

14. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

15. $(a^x)'=a^x\cdot\ln x$

16. $(\log x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$

17. $f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

18. $f'(kx+b)=k\cdot f'(kx+b)$

При решении задач на нахождение уравнения касательной к графику функции в точке используется геометрический смысл производной $f'(x_0)=k$

Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

Примеры 1:

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, \quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = (-1)\,x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$;

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$.

а) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, поэтому

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2};$$

б) $$\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^3+1) - x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{2x(x^3+1) - x^2((x^3)'+1)'}{(x^3+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2+0)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2}.$$

Ход работы

1. Внимательно прочитайте теоретический материал
2. Перепишите в тетрадь основные правила дифференцирования, таблицу основных формул дифференцирования
2. Проанализируете примеры с решением, перепишите в тетрадь
3. Выполните задание по вариантам (Вариант 1 – решает все примеры по буквой а, Вариант 2 – под буквой б, Вариант 3 – под буквой в, Вариант 4 - г), с подробным решением в тетради

а) $f(x) = x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$; б) $f(x) = 2x^4 - x^8$;

в) $f(x) = x^4 + 4x$; г) $f(x) = x^4 - 12x^2$.

а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

а) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$; б) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x^2 - x)$;

в) $f(x) = x^2(3x + x^3)$; г) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$.

а) $y = \frac{1+2x}{3-5x}$; б) $y = \frac{x^2}{2x-1}$; в) $y = \frac{3x-2}{5x+8}$; г) $y = \frac{3-4x}{x^2}$.

а) $y = x^8 - 3x^4 - x + 5$; б) $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$;

в) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1$.

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = 2x^2 - x$; **б)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 - 4x$; **г)** $f(x) = 2x - 5x^2$.

Практическая работа № 27
Тема: Решение упражнений на вычисление производной
Цель: Отработать навыки нахождения производных
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Ход работы
1. Вспомните теоретический материал п.р № 54-55
2. Выполните задание по вариантам, указав только ответы

Вариант 1

А1. Найдите производную функции $y = 4x^3$.
1) $12x^2$ 2) $12x$ 3) $4x^2$ 4) $12x^3$

А2. Найдите производную функции $y = 6x - 11$.
1) -5 2) 11 3) 6 4) 6x

А3. Найдите производную функции $y = \frac{x-1}{x}$.
1) $-\frac{1}{x^2}$ 2) $\frac{x-1}{x^2}$ 3) $\frac{2x+1}{x^2}$ 4) $\frac{1}{x^2}$

А4. Найдите производную функции $y = x\sin x$.
1) $\sin x - x\cos x$ 2) $\sin x + x\cos x$ 3) $\cos x$ 4) $x + x\cos x$

А5. Найдите производную функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.
1) $\pi^2 - 1$ 2) $2\pi + 1$ 3) $2\pi - 1$ 4) 2π

А6. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ в точке $x_o = 2$.
1) 10 2) 12 3) 8 4) 6

А7. Найдите производную функции $y = \sin(3x + 2)$.
1) $\cos(3x+2)$ 2) $-3\cos(3x+2)$ 3) $3\cos(3x+2)$ 4) $-\cos(3x+2)$

А8. Вычислите значение производной функции $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$ в точке $x_o = 4$.
1) 21 2) 24 3) 0 4) 3,5

А9. Вычислите значение производной функции $y = \frac{1}{2}tg(4x - \pi) + \frac{\pi}{4}$

вточке $x_0 = \frac{\pi}{4}$. 1) 2 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) 4 4) $\frac{\pi}{2}$

А10. Найдите производную функции $y = x^2\cos x$.
1) $2x\sin x$ 2) $-2x\sin x$ 3) $2x\cos x + x^2\sin x$ 4) $2x\cos x - x^2\sin x$

В1. Вычислите значение производной функции $y = 14\sqrt{2x-3}$ в точке $x_o = 26$.

B2. Найдите значение *x,* при которых производная функции $y=\dfrac{x-2}{x^2}$ равна *0.*

Вариант 2

А1. Найдите производную функции $y=\dfrac{1}{3}x^6$.

1) $2x^6$ 2) $2x^5$ 3) $\dfrac{1}{3}x^5$ 4) $6x^5$

А2. Найдите производную функции $y=12-5x$.

1) *7* 2) *12* 3) *-5* 4) *-5x*

А3. Найдите производную функции $y=\dfrac{x+3}{x}$.

1) $\dfrac{3}{x^2}$ 2) $\dfrac{2x-3}{x^2}$ 3) $-\dfrac{3}{x^2}$ 4) $-\dfrac{3}{x}$

А4. Найдите производную функции $y=x\cos x$.

1) $\cos x-x\sin x$ 2) $\cos x+x\sin x$ 3) $-\sin x$ 4) $x-\sin x$

А5. Найдите производную функции $y=x^2+\cos x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

1) π^2-1 2) $\pi+1$ 3) $\dfrac{\pi}{2}-1$ 4) $\pi-1$

А6. Вычислите значение производной функции $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+3x$ в точке $x_o=2$.

1) *13* 2) *3* 3) *8* 4) *27*

А7. Найдите производную функции $y=\cos(5x-2)$.

1) $-2\sin(5x-2)$ 2) $-5\sin(5x-2)$ 3) $5\sin(5x-2)$ 4) $\sin(5x-2)$

А8. Вычислите значение производной функции $y=\dfrac{3}{x}-\sqrt{x}$ в точке $x_0=\dfrac{1}{4}$.

1) *-47* 2) *-49* 3) *47* 4) *11,5*

А9. Вычислите значение производной функции $y=1+ctg(2x+\pi)$

вточке $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$. 1) *2* 2) *-1* 3) *-2* 4) $-\dfrac{1}{2}$

А10. Найдите производную функции $y=x^2\sin x$.

1) $2x\cos x$ 2) $2x\sin x-x^2\cos x$ 3) $2x\sin x+x^2\cos x$ 4) $-2x\cos x$

В1. Вычислите значение производной функции $y=30\sqrt{4-3x}$ в точке $x_o= -7$.

В2. Найдите значение *x,* при которых производная функции $y=\dfrac{x+2}{x^2}$ равна *0.*

Практическая работа № 28

Тема: Решение задач на применение производной к исследованию
Цель: Научится исследовать функцию с помощью производной
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Общее исследование функции и построение её графика рекомендуется выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции
2. Выясняют функция четная или нечетная, является периодической
3. Точки пересечения с осями координат
4. Промежутки знакопостоянства
5. Промежутки возрастания и убывания
6. Точки экстремума и значения fв этих точках
7. Исследуют поведение функции в окрестностях особых точек и пребольших по модулю x

На основании такого исследования строится график функции.

Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции *f* и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал

2. Посмотрите пример исследования графика функций

Пример 1. Исследуем функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме.

1) $D(f) = R$, так как *f* — многочлен.

2) Функция *f* не является ни четной, ни нечетной (докажите это самостоятельно).

3), 4) График *f* пересекается с осью ординат в точке $(0; f(0))$; чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$, один из корней которого ($x = 1$) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства мы находить не будем (как уже отмечалось в п. 4, при-

веденная схема имеет примерный характер).

5), 6) Найдем производную функции f:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

$D(f') = R$, поэтому критических точек, для которых $f'(x)$ не существует, нет.

Заметим, что $f'(x) = 0$, если $x^2(x^2 - 1) = 0$, т. е. при значениях аргумента, равных 0, -1 и 1. Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

В первой строке этой таблицы указаны в порядке возрастания критические точки функции и ограниченные ими промежутки. Во второй строке отмечены знаки производной на этих промежутках. (На каждом таком интервале знак производной не меняется, его можно найти, определив знак производной в какой-либо точке рассматриваемого интервала.) В третьей строке записаны выводы о ходе изменения данной функции: «↗» — возрастает, «↘» — убывает, а в четвертой — о виде критических точек (пп. 5 и 6 приведенной выше схемы). Критическая точка 0 функции f не является точкой экстремума, поэтому в четвертой строке таблицы она не отмечена. Заметим, что вывод о ходе изменения функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной). Например, $f(0) < f(-1)$, поэтому на промежутке $(-1; 0)$ функция убывает (и, следовательно, $f' < 0$ на этом промежутке).

Строим график функции (рис. 111).

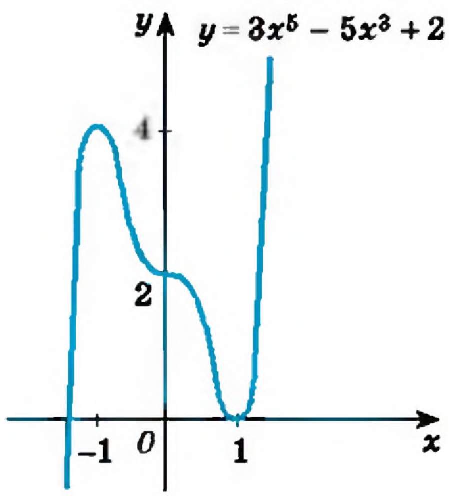


Рис. 111

Строить его удобно по промежуткам, которые указаны в таблице. Например, в таблице указано, что f убывает на интервале (0; 1). Функция f непрерывна в точках 0 и 1 (так как она непрерывна всюду), следовательно, она убывает на отрезке [0; 1]. Поэтому рисуем график убывающим на отрезке [0; 1] от значения $f(0) = 2$ до значения $f(1) = 0$. При этом касательные к графику в точках 0, ± 1 должны быть горизонтальными — во второй строке таблицы сказано, что в этих точках производная равна нулю. Аналогично строится график и на остальных промежутках.

3. Выполните задание по вариантам

Вариант 1

Исследовать функцию с помощью производной по общей схеме и постройте её график.

а) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ б) $y = 1 + 2x^2 - x^4$

Вариант 2.

Исследовать функцию с помощью производной по общей схеме и постройте её график.

а) $y = 2 + 3x - x^3$ б) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

Практическая работа № 29

Тема: Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции

Цель: Научится находить наибольшее, наименьшее значения и экстремальные значения функций

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, надо **вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка**, а затем из полученных чисел **выбрать наибольшее и наименьшее.**

Пример 1

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$ на отрезке [−2; 4].

Вычислим производную данной функции $f'(x) = 36x + 24x^2 - 12x^3 = 12x(3 + 2x - x^2)$. Приравняем производную нулю, получим уравнение $x(3 + 2x - x^2) = 0$ и найдем критические точки функции $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 3$. Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$.

Видно, что в точках $x = -1$ и $x = 3$ функция имеет максимум, в точке $x = 0$ функция имеет минимум. На промежутке $[-2; 4]$ находятся все три точки экстремума.

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка. Эти величины приведены в таблице.

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$	-40	7	0	135	32

Из сравнения значений функции видно, что $\max\limits_{[-2;\,4]} f(x) = f(3) = 135$ и $\min\limits_{[-2;\,4]} f(x) = f(-2) = -40$. В данном случае наибольшее значение функции достигается в точке максимума $x = 3$, наименьшее значение – на левой границе $x = -2$ рассматриваемого промежутка.

Пример 2

Найдем множество значений функции $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$ на от-

Вычислим производную данной функции $f'(x) = \frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 + {}$ $+\cos x = -\sin 2x + \cos x = \cos x(-2\sin x + 1)$. Приравняем производную нулю. Получаем уравнение $\cos x(-2\sin x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнение $\cos x = 0$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Их решения на данном отрезке: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$. Определим знак производной $f'(x)$, например при $x = 0$.

Получаем: $f'(0) = \cos 0\cdot(-2\sin 0 + 1) = 1 > 0$. Теперь легко построить диаграмму знаков производной. Видно, что в точках $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$ функция $f(x)$ имеет максимум, в точке $x = \frac{\pi}{2}$ – минимум. Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка. Эти величины приведены в таблице.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Из сравнения значений функции видно, что множество значений функции на данном промежутке $\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{3}{4}$. Видно, что наименьшее значение функция достигает в точке минимума и на концах данного отрезка, наибольшее значение – в точках максимума, то есть $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = \frac{1}{2}$ и $\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал и примеры с решением

2. Выполните задание аналогично выполненным в примерах

Вариант 1 - а,в Вариант 2 - б,г

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на промежутках $[-1;\ 1]$ и $[0;\ 3]$;

б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ на промежутках $[-4;\ -1]$ и $[1;\ 3]$;

в) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ на промежутках $[0;\ 2]$ и $[2;\ 3]$;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ на промежутках $[-3;\ -2]$ и $[1;\ 5]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на данном промежутке:

а) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $[0;\ 2\pi]$;

б) $f(x) = 1{,}5x^2 + \frac{81}{x}$, $[1;\ 4]$;

в) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

г) $f(x) = x + \frac{1}{x+2}$, $[-5;\ -2{,}5]$.

Практическая работа № 30

Тема: Решение задач по правилам вычисления первообразной.

Цель: Научится вычислять первообразные функций

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполнено равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1

Функция $F(x) = x^5$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на промежутке $(-\infty; \infty)$, так как для всех x из этого интервала выполнено равенство $F'(x) = (x^5)' = 5x^4 = f(x)$.

Заметим, что функция $\bar{F}(x) = x^5 + \sqrt{3}$, например, также является первообразной для функции $f(x) = 5x^4$ на R, так как $\bar{F}'(x) = (x^5 + \sqrt{3})' = (x^5)' + (\sqrt{3})' = 5x^4 = F'(x) = f(x)$. Очевидно, что если вместо числа $\sqrt{3}$ поставить любую постоянную величину, результат от этого не изменится. Следовательно, задача **нахождения первообразной** имеет **бесконечно много решений** (или говорят, что первообразная вычислена с точностью до постоянной).

Пример 2

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на R, так как для всех x из этого интервала выполнено равенство $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$. Так же как и в примере 1, функция $\bar{F}(x) = \sin x + C$ (где C – любая постоянная величина) тоже первообразная для функции $f(x) = \cos x$ на R, так как выполнено равенство $\bar{F}'(x) = f(x)$.

Таблица первообразных для функций

Функция $f(x)$	k (постоянная)	x^n $(n \neq -1)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Первообразная $F(x)$ (общий вид)	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Функция $f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Первообразная $F(x)$ (общий вид)	$\arcsin x + C$; $-\arccos x + \bar{C}$	$\operatorname{arctg} x + C$; $-\operatorname{arcctg} x + \bar{C}$

Правила нахождения первообразных

Правило 1. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то функция $F(x) + G(x)$ – первообразная для функции $f(x) + g(x)$. Можно сформулировать короче: **первообразная для суммы функций равна сумме первообразных каждой функции.**

Пример 1

Найдем первообразную для функции $f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Учтем, что функция $f(x) = x^4 - x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$ представляет собой алгебраическую сумму трех функций. Используя таблицу первообразных и правило 1, найдем: $F(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \operatorname{ctg} x + C = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \operatorname{ctg} x + C = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + C.$

Правило 2. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ – первообразная для функции $kf(x)$. Или короче: **первообразиая для произведения числа и функции равна произведению числа на первообразную функции.**

Исходя из определения первообразной и используя правило дифференцирования, получаем: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

Правило 3. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то функция $\dfrac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная для функции $f(kx+b)$, где k и b – постоянные. Короче: **первообразная для функции, зависящей от аргумента $kx+b$ (где k и b – постоянные), равна произведению числа $\dfrac{1}{k}$ на первообразную для функции от x при значении аргумента $kx+b$.**

Учитывая правило дифференцирования сложной функции, получаем: $\left(\frac{1}{k}F\left(kx+b\right)\right)' = \frac{1}{k}F'\left(kx+b\right)\cdot k = F'\left(kx+b\right) = f\left(kx+b\right).$

Пример 3

Найдем первообразную функции $f(x) = \cos(\sqrt{5}x + 3)$.

Так как первообразная для функции $\cos x$ есть функция $\sin x$, то в соответствии с правилом 3 первообразная для функции $f(x) = \cos(\sqrt{5}x + 3)$ – функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}x + 3) + C$.

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал
2. Запишите в тетрадь правила вычисления первообразных, таблицу
3. Выполните задания используя таблицу и правила вычисления первообразных

Вариант 1- а,в   Вариант 2 – б,г

Найдите общий вид первообразных для функции f

а) $f(x) = 2 - x^4$; б) $f(x) = x + \cos x$;

в) $f(x) = 4x$; г) $f(x) = -3$.

а) $f(x) = x^6$; б) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$;

в) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$; г) $f(x) = x^5$.

а) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$; б) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$; г) $f(x) = 5x^2 - 1$.

а) $f(x) = (2x - 3)^5$; б) $f(x) = 3\sin 2x$;

в) $f(x) = (4 - 5x)^7$; г) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

а) $f(x) = \frac{3}{(4 - 15x)^4}$; б) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$;

Практическая работа №31

Тема: Решение задач на вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Цель: Отработать навыки решения задач на вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал:

$$S = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

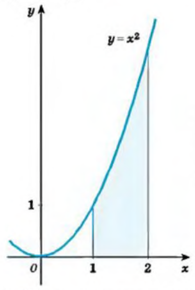
Ход работы

1.Прочитать теоретический материал

2. Повторить таблицу первообразных

3. Разобрать пример вычисления площади криволинейной трапеции, переписать в тетрадь

Пример. Вычислим площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2$, прямыми $y = 0$, $x = 1$ $x = 2$



Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Следовательно,

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

4. Выполнить задание:
Вариант 1 нечетные цифры, буквы а,г
Вариант 2 четные цифры, буквы б,в
Вычислите площадь фигур по формуле Ньютона-Лейбница

1) $y = 3x - 1$, $x = 2$, $y = 0$; 2) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$;
3) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; 4) $y = (x + 1)^2$, $y = 0$, $x = 0$;
5) $y = x^3 + 1$, $y = 1$, $x = 2$; 6) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$;
7) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; 8) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$;

а) $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$;
б) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
в) $y = 2x - x^2$, $y = 0$; г) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$, $x = 0$.

Практическая работа №32
Тема: Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей
Цель: Закрепление знаний в применении интеграла к вычислению физических величин и площадей
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал
С помощью определённого интеграла можно решать различные задачи физики, геометрии и т.д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.
1. Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном , неравномерном движении.

$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(x)\,dx$ - путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2,

$\upsilon(x)$ - скорость неравномерного движения

Задача
Скорость движения материальной точки задаётся формулой $\upsilon(x) = 4t^3 - 2t + 1$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 4 с от начала движения.
Решение

$$S = \int_0^4 (4t^3 - 2t + 1)\,dt = \left(\frac{4t^4}{4} - \frac{2t^2}{2} + t\right)\Bigg|_0^4 = (t^4 - t^2 + t)\Big|_0^4 = 4^4 - 4^2 + 4 - 0 = 256 - 16 + 4 = 244\ м$$

Ответ: 244 м

Вычисление работы, затраченной на растяжение и сжатие пружины.

$A = k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$ - работа силы упругости, где k – коэффициент упругости пружины, x_1 – начальное положение пружины, x_2 – конечное положение пружины .

F = k · Δx - закон Гука, где k – коэффициент упругости пружины, Δx - изменение длины пружины.

Задача

Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

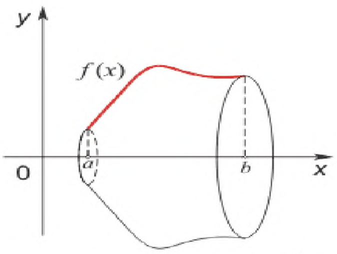
Решение

$$F = k\cdot\Delta x \qquad k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{10}{0{,}02} = \frac{1000}{2} = 500\,\text{Н/м}$$

$$A = 500\int_0^{0{,}02} x\,dx = 500\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}02} = 250x^2\Big|_0^{0{,}02} = 250\cdot 0{,}02^2 - 0 = 250\cdot 0{,}0004 = 0{,}1\,Дж.$$

Ответ: A = 0,1Дж

Определение объёма тела вращения.



$v = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \pi\cdot f^2(x)\,dx$ - объём тела вращения , где S(x) – площадь сечения фигуры плоскостью перпендикулярной оси Ox

Ход работы.

1. Прочитайте теоретический материал
2. Выполните задания по вариантам

1 вариант.

Скорость прямолинейно движущегося тела v = (4t – t^2) м/с. Вычислить путь, пройденный телом за первые 5 сек.

Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,02 м требуется сила в 10 Н.

Фигура, ограниченная прямыми y = - x + 3, x = 0, x = 3, y = 0 вращается вокруг оси Ox. Найти объём полученного тела вращения.

2 вариант.

Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки, если его скорость определяется по формуле v = (6t – $2t^2$) м/с.

Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 4 см, если при растяжении её на 1 см нужна сила в 10 Н.

Фигура, ограниченная кривой y = $\frac{1}{x}$ и прямыми x = 2, x = 3 . Найти объём тела, полученного при вращении кривой вокруг оси Ox.

Практическая работа №33

Тема: Нахождения корней уравнения

Цель: Отработать навыки нахождения корней уравнения

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы

1.Для решения рациональных уравнений (1-10) достаточно провести безошибочно необходимые преобразования, и уметь решать квадратное уравнение. Напомним, что мы можем:

1. Умножать и делить левую и правую части уравнения на одно и то же число или выражение.
2. Прибавлять к обеим частям уравнения или вычитать одно и то же число (выражение).

По-другому эта операция звучит так: перенос слагаемых, из левой части в правую и наоборот, при этом знак слагаемого изменяется на противоположный.

3. Можем возводить в квадрат и извлекать квадратный корень из обеих частей.

Квадратное уравнение (общий вид):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Находим дискриминант $D = b^2 - 4ac$

Находим корни по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

И главное. Обязательно делайте проверку после того как найдёте корни. В некоторых примерах вы получите два корня и вам будет нужно выбрать один из них. Так вот – проверку делайте для обоих корней, а затем выбирайте указанный в условии корень. Только в этом случае ошибка будет практически исключена.

2. Вспомним алгоритм решения рационального уравнения (11-14)

1. Перенести все члены уравнения в одну часть.
2. Преобразовать эту часть уравнения к виду алгебраической дроби $\frac{p(x)}{q(x)}$

3.решить уравнение p (x) = 0.

4. для каждого корня уравнения p(x)=0 сделать проверку: удовлетворяет ли он условию q(x) не равно 0 или нет. Если да, то это – корень заданного уравнения; если нет, то это – посторонний корень и в ответ его включать не следует.

3. Найдите корень уравнения: Вариант 1 – четные числа, Вариант 2 - нечетные

$$\frac{x - 41}{x - 5} = 3 \qquad \frac{1}{4x + 1} = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{9x - 20}{x + 18} \qquad \frac{x - 119}{x + 7} = -5$$

$$\frac{11}{x^2 + 7} = 1 \qquad x = \frac{6x - 15}{x - 2}$$

$$\frac{7x}{2x^2 - 15} = 1 \qquad \frac{9}{x^2 - 16} = 1$$

$$\frac{x + 5}{7x + 11} = \frac{x + 5}{6x + 1} \qquad \frac{x + 8}{5x + 7} = \frac{x + 8}{7x + 5}$$

11. $\frac{2x}{x-3}+\frac{11}{2} = \frac{3}{x}$ 12. $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$

13.$\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1$ 14. $\sqrt{-9x^2 + 3x - 6} = \sqrt{-6x - 24}$

Практическая работа №1
Тема: Нахождения корней уравнения
Цель: Закрепить способы решения уравнений различными способами.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Сведения из теории:

Метод разложения на множители

Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Проще всего уяснить эту идею на конкретном примере.

Пример 1.

Решите уравнение методом разложения на множители: $2{,}5x^2 + 4x = 0$.

Решение:

осуществим разложение на множители (представим исходное выражение в виде произведения). Для этого вынесем переменную x за скобки:

$$x(2{,}5x + 4) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно,

$$x = 0 \text{ или } 2{,}5x + 4 = 0.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$2{,}5x = -4 \text{ или } x = -1{,}6.$$

Ответ: $x = 0$ и $x = -1{,}6$.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение методом разложения на множители: $3x^2 + 1{,}5x = 0$.

Метод замены переменной

Суть данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной. Все эти идеи проще осознать на конкретном примере.

Пример 2.

Решите уравнение методом замены переменной: $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

Решение:

такие уравнения называются биквадратными. Перепишем его в виде:

$$(x^2)^2 + 4x^2 - 5 = 0 .$$

Введем новую переменную $t = x^2$.Тогда исходное уравнение примет следующий простой вид:

$$t^2 + 4t - 5 = 0 .$$

Решая полученное квадратичное уравнение, получаем, что:

$$t = -5 \text{ или } t = 1 .$$

Возвращаемся теперь к старой переменной (обратная замена):

$$x^2 = -5 \text{ или } x^2 = 1 .$$

Решений у первого уравнения нет, поскольку не существует такого действительного числа, квадрат которого был бы отрицателен. Второе уравнение имеет два корня ± 1 .

Ответ: ± 1 .

Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение методом замены переменной: $9x^4 - 24x^2 + 7 = 0$.

Пример 3 .

Решите уравнение методом замены переменной: $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.

Решение:

обращаем внимание на то, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на x . Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1 .$$

Введем новую переменную: $t = 4x + \dfrac{7}{x}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{4}{t - 8} + \frac{3}{t - 10} = 1 .$$

Выполнив элементарные преобразования: приведем дроби к общему знаменателю, приведем подобные слагаемые, получим:

$$\frac{t^2-25t+144}{(t-8)(t-10)}=0.$$

Дробь равна нулю, если нулю равен ее числитель, а знаменатель при этом не равен нулю. То есть уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t^2-25t+144=0 \\ t\neq 8 \\ t\neq 10 \end{cases}.$$

Решив первое уравнение системы, имеем: t=16 или t=9.

Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. $4x+\frac{7}{x}=16$, что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-16x+7=0$, решая которое, получаем $x=\frac{1}{2}$ или $x=\frac{7}{2}$.

2. $4x+\frac{7}{x}=9$ что при $x\neq 0$ равносильно уравнению $4x^2-9x+7=0$, у которого решений нет, поскольку его дискриминант отрицателен.

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите уравнение методом разложения на множители: $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=0$.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть решения уравнения методом разложения на множители?
2. В чем суть решения уравнения методом замены переменной?

Практическая работа №4
Тема: Основные приемы решения уравнений.
Цель: Изучить и закрепить основные приемы решения уравнений. Решение систем уравнений
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник
Теоретический материал
Опр.
Показательными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени.
1) Простейшие уравнения, т.е. такие, левую и правую части которых можно привести к одному основанию решаются так:
$5^x=625 \quad \Rightarrow 5^x=5^4 \Rightarrow x=4. \qquad \textit{Ответ}: x=4$
2) Уравнения вида $2^x+2^{x-1}-2^{x-3}=4$ решаются вынесением за скобки степени с наименьшим показателем.

3) Уравнения, вида $7^{2x} - 48 \cdot 7^{x} = 49$ решаются с помощью подстановки $a^{x} = y$, сводится к квадратному.
Тригонометрические уравнения
Способы решения
1. Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям
2. Однородные уравнения
3. Разложение на множители
4. Замена переменной
5. Метод вспомогательного угла
Ход работы
1. Рассмотреть примеры решения показательных уравнений
Пример. Решить уравнение: $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^{x} + 5 = 0$
Решение: $5^{x} = y$,
$5y^2 - 26y + 5 = 0$,
$D = 676 - 4 \cdot 25 = 576$,
$y_1 = 5, \quad y_2 = \dfrac{1}{5}$
$5^{x} = 5$
$x = 1$,
$5^{x} = \dfrac{1}{5}$
$x = -1$
Ответ: $x = 1$ и $x = -1$
4) Прирешения уравнения вида $a^{x} = b^{x}$ обе части уравнения необходимо разделить на b^{x}, т.к. $b^{x} \neq 0$

$$\frac{a^x}{b^x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

2.Рассмотреть примеры решения тригонометрических уравнений
1.Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям
$2\cos^2x+\sin x+1=0$
$2*(1-\sin^2x)+\sin x+1=0$
$2-2\sin^2x+\sin x+1=0$
$-2\sin^2x+\sin x+3=0$
Пустьа=sinx
$-2a^2+a+3=0$
a1=-1, a2=1,5
Sinx=-1 sinx=1,5
X=-П/2+2Пn, неткорней
2. Однородные уравнения
$3\sin^2x+\sin x\cos x=2\cos^2x$
Делим на $\sin^2x$ обе части уравнения
$3+\cos x/ \sin x=2\cos^2x/\sin^2x$
Известно ,что ctgx= cosx/sinx
Получим $3+\mathrm{ctg}x=2\mathrm{ctg}^2x$
Пустьа=ctgx
$3+a=2a^2$
$2a^2-a-3=0$
a1=1,5 a2=-1
Получимctg x=1,5 ctg x=-1
X=arcctg1,5+Пn x=3П/4+Пm
3. Рассмотреть пример решения системы уравнений

Например, систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7 \end{cases}$ заменой

$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ можно привести к системе

$\begin{cases} u^2 - 2v = 25, \\ u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7, \\ v = 12. \end{cases}$

Зная u и v, по теореме, обратной к теореме Виета, находим x и y из квадратного уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$: $t_1 = 3$, $t_2 = 4$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

4. Решите уравнения по вариантам

Вариант 1

1. Решить показательные уравнения:

а) $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$ б) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$; в) $4 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x + 1 = 0$

2. Решите тригонометрические уравнения

а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;

б) $\cos 2x + \sin x = 0$;

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 1; \end{cases}$

Вариант 2

1. Решить показательные уравнения:

а) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} = 2$; б) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$; в) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

2. Решите тригонометрические уравнения

а) $\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;

б) $\cos 2x + \cos x = 0$;

3. Решите систему уравнений:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10; \end{cases}$

Практическая работа №2

Тема: Равносильность уравнений. Преобразование уравнений.

Цель: Владение стандартными приемами находить корни, обобщать, систематизировать, видеть равносильность преобразования уравнений.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

Образец решения:

Пример 1

Уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ - равносильны?

Решение:

$$x^2 - 4 = 0 \text{ имееткорних} = \pm\mathbf{2}, \quad \text{т. к. } x^2 = 4;$$

$$(x + 2)(2^x - 4) = 0, \quad \text{т. к. } x + 2 = 0, \quad \boldsymbol{x = -2}$$

и $2^x = 4$, $2^x = 2^2$, $x = \mathbf{2}$.

Ответ: да, таккакимеютодинаковыекорни.

Пример 2

Проверить на равносильность уравнения: $x^2+1=0$ и $\sqrt{x}+2=0$.

Решение:

$$x^2+1=0 \text{ – неимееткорнейвобластидействительныхчисел}$$

и $\sqrt{x}+2=0$ – неимееткорнейвобласти $R=(-\infty;\ +\infty)$

Ответ: равносильны, так как они не имеют корней.

Пример 3

Определить уравнение-следствие при решении уравнений $x-2=3$ и $x^2-25=0$.

Решение:

Уравнение $x-2=3$ имеет корень 5, уравнение $x^2-25=0$ имеет корни ± 5. Так как корень уравнения $x-2=3$ является корнем уравнения $x^2-25=0$, то уравнение $x^2-25=0$ является следствием уравнения $x-2=3$.

Пример 4

Решить двумя способами уравнения и сделать вывод:

а) $\sqrt{x+11}=x-1$;

б) $\sqrt{x-5}=\sqrt{2-x}$.

Решение:

а) *первый способ:*

ОДЗ:

$$x+11 \geq 0$$
$$x \geq -11$$

$(\sqrt{x+11})^2=(x-1)^2$, $\quad x+11=x^2-2x+1$

$x^2-3x-10=0$,

$x_1=-2$; $\quad x_2=5$.

Оба корня принадлежат ОДЗ уравнения, но это не меняет сути дела и мы вынуждены выполнить проверку корней.

Проверка: при $x_1=-2$, получим $\sqrt{-2+11}=-2-1$ - неверное равенство, $x_1=-2$ - посторонний корень;

при $x_2=5$, получим $\sqrt{5+11}=5-1$ или $4=4$ - верное равенство, 5 - корень исходного уравнения.

Ответ: 5

второй способ:

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+11=(x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2, x_2=5 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

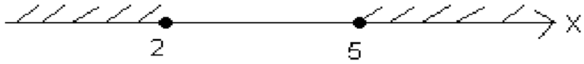
Решение системы исходного уравнения $x_2=5$.

Ответ: 5

б) *первый способ:*

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



Решений нет

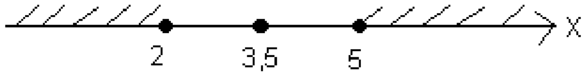
Значит, ОДЗ уравнения пустое множество, уравнение решений не имеет

Ответ: корней нет

второй способ:

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-5=2-x \\ x-5 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3{,}5 \\ x \geq 5 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



Системы решений не имеют, значит, и исходное уравнение тоже решений не имеет

Ответ: корней нет.

Вывод: При решении иррациональных уравнений – возведение обеих частей уравнения в четную степень, принадлежность полученных корней ОДЗ уравнения не позволяет сделать вывод, о том являются ли эти корни посторонними или нет. Поэтому выполнение проверки корней обязательно и это этап решения уравнения. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он, конечно, посторонний корень уравнения. В то же время, записывая систему равносильную уравнению, мы не нарушаем логики решения: ведь уравнение спустой ОДЗ равносильно системе, не имеющей решений.

<u>Пример 5</u>

Решить уравнение: $|2x-3|=5$

ОДЗ:

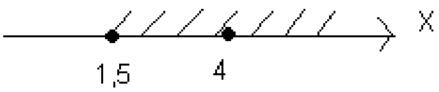
$x \in R=(-\infty;\ +\infty)$.

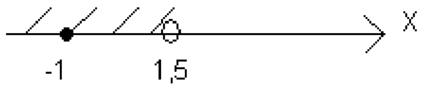
Решение: Данное уравнение равносильно системам,на основании определения

модуля: $|a|=\begin{cases} a, если a \geq 0 \\ -a, если a<0 \\ 0, если a=0: \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x-3=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3<0 \\ -2x+3=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1,5 \\ x=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x<1,5 \\ x=-1 \end{cases}$



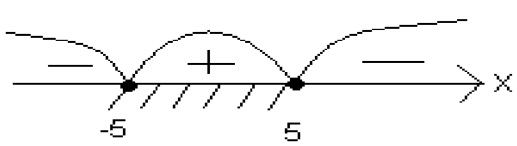


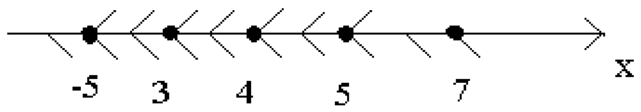
$x=4$ $x=-1$

Ответ: $-1;\ \ 4$.

<u>Пример 6</u>

Являются ли уравнения равносильными: $2^x-2^{x-4}=15$ и $x+\sqrt{25-x^2}=7$?

Решение: $2^x-2^{x-4}=15$ – показательное уравнение По свойству степеней: $2^x-\frac{2^x}{2^4}=15, \quad 2^x\left(1^{16}-\frac{1}{16}\right)=15$ $2^x=2^4$, $x=4$ – корень уравнения	$x+\sqrt{25-x^2}=7$ – иррациональное уравнение ОДЗ: $25-x^2 \geq 0$  $x \in [-5;\ 5]$ Данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 25-x^2=(7-x)^2 \\ 7-x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 25-x^2=49-14x+x^2 \\ x \leq 7 \end{cases}$ $2x^2-14x+24=0$ $x^2-7x+12=0$ $x_1=4, \qquad x_2=3$ – корни уравнения, так как принадлежат

	ОДЗ, т.е. геометрически: 

Ответ: неравносильны, таккакуравненияимеютнеодинаковыекорни.

Ход работы

Посмотреть образцы решения уравнений, записать в тетрадь

Выполнить задание по вариантам

1 вариант

Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения:

$$a * b = d * b \text{ и } a = d$$

были равносильны

Решить 2-мя способами уравнение:

$2\sqrt{1 - x^2} = x - 2$ и сделать вывод

Равносильны ли уравнения:

$$5^{x+1} + 5^x = 750 \quad \text{и} x^2 - 9 = 0?$$

Решить уравнение:

$\sin 4x = 0$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm 2$

Найти корень уравнения:

$$\frac{2x - 9}{2x - 5} - \frac{3x}{2 - 3x} = 2$$

2 вариант

Добавьте дополнительное условие так, чтобы уравнения:

$$\sqrt{a} = b \text{ и } a = b^2$$

были равносильны

Решить 2-мя способами уравнение:

$\sqrt{x + 1} = x - 1$ и сделать вывод

Равносильны ли уравнения:

$$6^{x+2} - 6^x = 35 \quad \text{и} x^2 = 0?$$

Решить уравнение:

$\cos 6x = 1$ и вычислить полученный результат при $k = 0;\ \pm\frac{1}{2}$

Найти корень уравнения:

$$\frac{2x - 1}{x - 3} + \frac{5 - 4x}{3 - x} = 6$$

Практическая работа №3

Тема: Основные приемы решения уравнений.

Цель: Обобщить и систематизировать знания по решению уравнений

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы:

Ответьте на контрольные вопросы:

А) Какие уравнения называются показательными?

Б) Основные свойства степени с рациональным показателем.

В) Основные свойства степени с действительным показателем.

Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач Сделать краткие записи в рабочей тетради.

Изучить условие заданий практической работы. Оформить отчет о работе.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x)=g(x)$ равносильны для любого числа a>0, a ≠ 1.

Методы решения показательных уравнений

<u>1. Простейшие показательные уравнения</u>

Пример 1.Решите уравнение: 34x-5 = 3x+4 .

Решение. 34x-5 = 3x+4; 4x -5 = x+4; 3x=9; x = 3 .

Ответ:3

<u>2. Методы преобразования показательных уравнений к простейшим.</u>

А. Метод уравнивания оснований.

Пример 2. Решите уравнение: $27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$.

Решение. $27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$

$3^3 \cdot 3^{4x-9} - (3^2)^{x+1} = 0$; $3^{3+(4x-9)} - 3^{2(x+1)} = 0$; $3^{4x-6} - 3^{2x+2} = 0$;
$3^{4x-6} = 3^{2x+2}$; $4x-6=2x+2$; $2x = 8$; $x=4$.
Ответ: 4.
Пример 3. Решите уравнение: $2^{2x} \cdot 3^{3x} \cdot 5^x - 60^{4x-15}=0$.
Решение. $(2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15}=0$; $(2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x = 60^{4x-15}$;
$4^x \cdot 3^x \cdot 5_x = 60^{4x-15}$; $(4 \cdot 3 \cdot 5)^x = 60^{4x-15}$; $60^x = 60^{4x-15}$;
$x=4x-15$; $3x=15$; $x=5$. Ответ: 5.
В. Уравнения, решаемые разложением на множители.
Пример 4. Решите уравнение: $x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x + 8x-16$.
Решение. $x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x + 8x-16$, $2^x - 2 \cdot 2^x = 8 \cdot (x-2)$, $2^x \cdot (x-2) - 8 \cdot (x-2)=0$
$(x-2) \cdot (2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2^x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.
Ответ: $\{2;3\}$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	**Вариант 2**
$9^x = 3^{2\sqrt{2}}$	$7^{x\sqrt{3}} = \sqrt{7}$
$2^{2x+1} = 32$	$2^{2+x} = 4$
$3 \cdot 9^x = 81$	$2 \cdot 4^x = 64$
$2^{x+2} + 2^x = 5$	$3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13$
$4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$	$2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x = 4$

Практическая работа №5
Тема: Решение систем уравнений
Цель: Обобщить и систематизировать знания по изучаемой теме Закрепить умения использовать полученные знания при решении уравнений и неравенств графическим методом.
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Ход работы:

Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач. Сделать краткие записи в рабочей тетради.
Под руководством преподавателя выполнить задания для самоконтроля.
Изучить условие заданий для практической работы. Оформить отчет

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

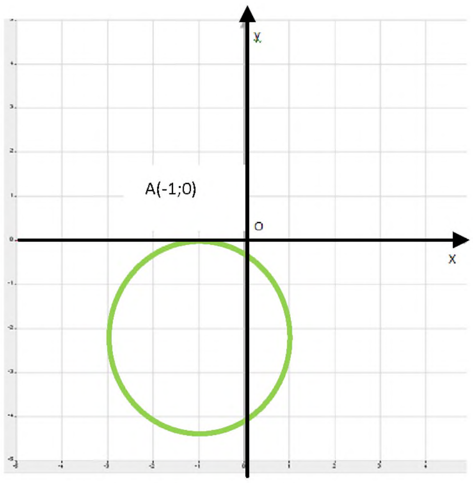
Графическое решение систем уравнений

Решить графически систему уравнений - это значит найти координаты общих точек графиков уравнений, построенных в одной системе координат.

Пример 1. Решите графически систему уравнений.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (x+1)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Решение. 1. $(x+1)^2 + (x+1)^2 = 4$ - уравнение окружности с центром в точке с координатами (-1;-2) и радиусом r = 2



2. y = 0 – уравнение оси Ох

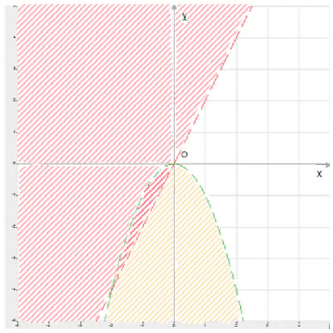
Общая точка:
A(-1:0), значит
x = -1, y = 0.

Проверка:
x=-1, y=0, то система примет вид:
$\begin{cases} (-1+1)^2 + (0+2)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0^2 + 2^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 4 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$
Значит, (-1;0) решение системы Ответ: (-1;0)
Графическое решение системы неравенств

Решить графически систему неравенств – это значит найти область решений, координаты которой будут удовлетворять обеим неравенствам.

Пример. Решите графически систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + y < 0 \\ y - 2x > 0 \end{cases}$.

Решение. Преобразуем первое и второе неравенства системы: $\begin{cases} y < -x^2 \\ y > 2x \end{cases}$



$y = x^2$ - квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз

$y = 2x$ - линейная функция, график – прямая

1. A(0;-1), неравенство примет вид:
   0-1<0(истинно) , значит координаты всех точек внутренней области параболы без границы являются решениями первого неравенства.
2. B(-1;0), неравенство примет вид:
   0+2>0(истинно), значит координаты всех точек области над прямой без границы являются решениями второго неравенства.

Вывод: Т.о, координаты всех точек во внутренней области параболы, но лежащие выше прямой без границы являются решениями системы неравенств.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант.	**2 вариант.**
1. Решить графически систему уравнений: $\begin{cases} y - \sqrt{x} = 1 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$.	1. Решить графически систему уравнений: $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x + y = 2 \end{cases}$.
2. Решить графически систему неравенств: $\begin{cases} y^2 + y^2 \leq 9 \\ x - y \geq 3 \end{cases}$.	2. Решить графически систему неравенств: $\begin{cases} y^2 + y^2 \leq 4 \\ x - y \geq 2 \end{cases}$.

Практическая работа №6

Тема: Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств

Цель: Владение стандартными приемами находить корни, обобщать, систематизировать, видеть равносильность преобразования уравнений.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

Пример 1. Графически решить уравнение: $x^5 = 3 - 2x$.

Решение:

Построим графики функций $y = x^5$ и $y = 3 - 2x$(Рис. 1).

Графиком функции $y = x^5$ является парабола, проходящая через точки $(-1;-1), (0;0), (1;1)$.

График функции $y = 3 - 2x$ – прямая, построим её по таблице.

x	0	$\frac{3}{2}$
y	3	0

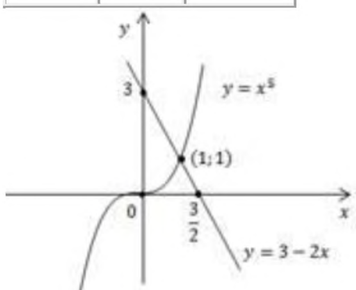


Рис. 1

Графики пересекаются в точке $(1; 1)$. Других точек пересечения нет, т. к. функция $y = x^5$ монотонно возрастает, функция $y = 3 - 2x$ монотонно убывает, а, значит, их точка пересечения является единственной.

Ответ: $x = 1$.

Пример 2. Решить неравенство

a. $x^5 > 3 - 2x$;

b. $x^5 \le 3 - 2x$.

Решение:

a. Чтобы выполнялось неравенство, график функции $y = x^5$ должен располагаться над прямой $y = 3 - 2x$ (Рис. 1). Это выполняется при $x > 1$.

b. В этом случае, наоборот, парабола $y = x^5$ должна находиться под прямой. Это выполняется при $x \le 1$.

Ответ:

a. $x > 1$;

b. $x \le 1$.

Вариант 1.Часть 1

При выполнении заданий этой части укажите цифру, которая обозначает выбранный вами ответ.

A1. Решите уравнение $x^2 - 4x + 4 + |x^2 - 3x + 2| = 0$.

1) -2; 2) 2; 3)1; 4) не имеет корней.

A2. Решите уравнение $2 - x = \sqrt{x + 18}$ и укажите верное утверждение о его корнях.

1) корень только один, и он положительный;

2) корень только один, и он отрицательный;

3) корней два, и они разных знаков;

4)корней два, и они отрицательные.

A3. Найдите область значений функции $g(x) = 2\sin x - 1$.

1)[-2;0]; 2)[-2;1]; 3)[-3;1]; 4)[-2;2].

Часть 2

Ответом на каждое задание этой части работы будет некоторое число. Это число надо вписать рядом с номером задания.

B1. Решите уравнение $(2x^2 - 9x)\sqrt{2 - x} = -9\sqrt{x - 2}$. (Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму всех его корней).

B2. Решите уравнение $\cos^2((x - 3) \cdot \sin x) = 1 + |\log_3(x^2 - 5x + 7)|$

B3. Решите неравенство $3\cos^2 x \ge 3 + |\log_5(x^2 - 4x + 1)|$

Часть 3

На листке запишите номер задания, а затем приведите полное, обоснованное решение.

C1. Найдите нули функции $y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$

Вариант 2.

Часть 1

При выполнении заданий этой части укажите цифру, которая обозначает выбранный вами ответ.

A1. Решите уравнение $x^2 - 10x + 25 + |x^2 - 9x + 20| = 0$.

1) -5; 2) 5; 3)4; 4) не имеет корней.

A2. Решите уравнение $x - 4 = \sqrt{31 - 6x}$ и укажите верное утверждение о его корнях.

1) корней два, и они разных знаков;

2) корней два, и они положительные;

3) корень только один, и он положительный;
4) корень только один, и он отрицательный.

А3. Найдите область значений функции $h(x) = 3 + \lg x$.

1)[3;+∞); 2)(-∞;+∞); 3)(-∞;3); 4)(3;+∞).

Часть 2

Ответом на каждое задание этой части работы будет некоторое число. Это число надо вписать рядом с номером задания.

В1. Решите уравнение $x^2\sqrt{x-1} - 4\sqrt{1-x} = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму всех его корней).

В2. Решите уравнение $\cos^2(x \cdot \sin x) = 1 + \log_{\frac{2}{5}} \sqrt{x^2 + x + 1}$

В3. Решите неравенство $\log_{0.2}(-x^2 + 6x - 8) \leq -9 + 6x - x^2$

Часть 3

На листке запишите номер задания, а затем приведите полное, обоснованное решение.

С1. Найдите нули функции $y = \sin^2 \pi x + \dfrac{12}{\ln^2(x^2 - x + 1)}$.

Практическая работа №7

Тема: Решение задач на применение бинома Ньютона и треугольника Паскаля

Цели: Научиться решать задачи с применением бинома Ньютона

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

Треугольник Паскаля – Это бесконечная числовая таблица «треугольной формы», в которой по сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц, получается как сумма двух предшествующих чисел.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Формула бинома Ньютона – для всех действительных чисел *a,b* и для всех натуральных чисел *n* имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^4 = \sum_{r=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \text{ , где}$$

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ и где коэффициенты $C_n^k, 0 < k < n$ называют *биномиальными коэффициентами*, а так же числом сочетаний и *n* элементов по *k*.

Существует связь между числами сочетаний и треугольником Паскаля:

Например:

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

<u>Вывод:</u> строки биноминальных коэффициентов, совпадают с 0 – й, 1 – й, 2 – й, 3 – й, 4 –й и т. д. строками треугольника Паскаля.

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-k}^{k}(-\frac{1}{4})^{k} = \frac{n+1}{2^{n}}$$

Пример:

Записать разложение бинома $(x-2)^6$.

По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5\cdot(-2) + C_6^2x^4\cdot(-2)^2 + C_6^3x^3\cdot(-2)^3 +$$
$$+ C_6^4x^2\cdot(-2)^4 + C_6^5x\cdot(-2)^5 + C_6^6\cdot(-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5\cdot(-2) + 15x^4\cdot 4 + 20x^3\cdot(-8) +$$
$$+ 15x^2\cdot 16 + 6x\cdot(-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

Найти девятый член разложения $(2+\sqrt{a})^{12}$.

Решение. Девятый член $T_{k+1} = T_9$, значит, $k = 8$, $n = 12$.

По формуле $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ найдем $T_9 = C_{12}^8 2^{12-8}(\sqrt{a})^8 = \frac{12!}{8!4!}2^4a^4$.

$$T_9 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 2^4\cdot a^4 = 7920a^4.$$

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал.
2. Прочитайте пример с решением и запишите в тетрадь
3. Выполните задания:

Вариант 1.Задание. Найти разложение $(1-\sqrt{2})^6$.

Вариант 2.Задание. **Найти средний член разложения бинома Ньютона**

$$\left(2x^2y - \frac{1}{x^2y}\right)^6$$

Практическая работа №8

Тема: Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач

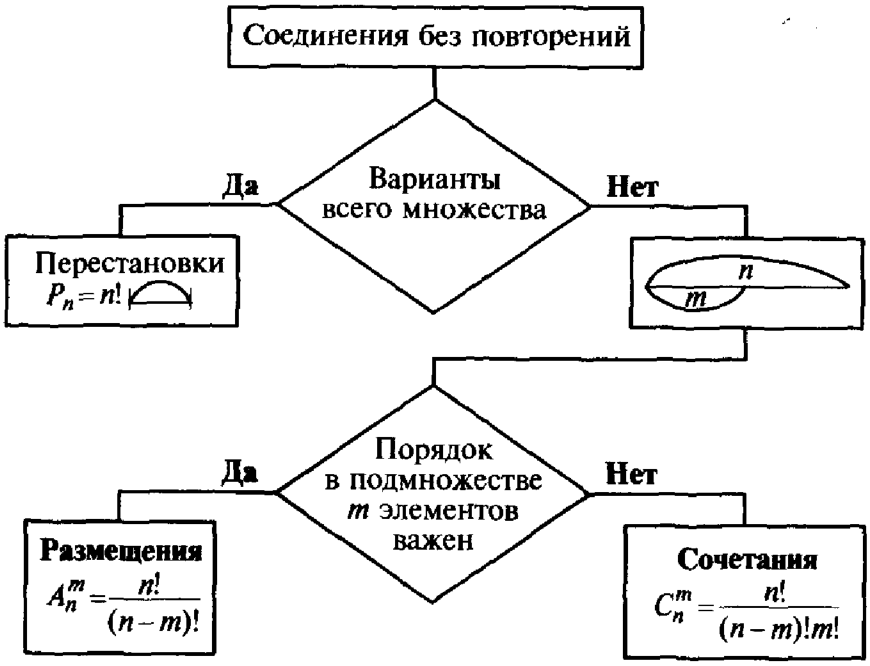
Цель: Научиться решать комбинаторные задачи

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Алгоритм решения комбинаторных задач



Ход работы:

1. Повторите алгоритм решения задач
2. Посмотрите применение алгоритма при решении задач, перепишите задачи в тетрадь

Пример 1. Восемь студентов обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

Решение. В рукопожатии участвует «подмножество», состоящее из двух студентов ($m = 2$), тогда как все «множество» студентов составляет 8 человек ($n = 8$). Наглядное представление «на отрезке» соотношения подмножества и множества удобно для выбора соединения (рис. 1.4).

Так как в процессе рукопожатия порядок не важен, выбираем формулу сочетаний

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28.$$

Пример 2. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг из пяти различных по цвету отрезов материи?

Решение. Порядок важен, так как перестановка материи внутри трехцветного флага обозначает разные страны. Поэтому выбираем формулу размещений без повторений, где множество отрезов материи содержит $n = 5$, а подмножество — $m = 3$ цветов:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Пример 3. Сколькими способами можно расставить на книжной полке девять книг, среди которых есть трехтомник А.С.Пушкина?

Решение. Так как три тома, входящие в трехтомник, должны стоять рядом, причем по возрастанию номера тома слева направо, рассматриваем их как один элемент данного множества, в котором имеется еще шесть элементов. Поэтому выбираем перестановки без повторений во множестве, содержащем семь элементов:

$$P_7 = 7! = 5040.$$

3. Решите задачи

Задача 1.7. Сколько имеется вариантов составления расписания на понедельник, если предметов у студентов 9, а в понедельник четыре пары занятий и предметы не повторяются?

Задача 1.9. Сколькими способами можно назначить в группе из 30 человек трех дежурных?

Задача 1.10. Сколько существует шестизначных телефонных номеров, у которых: а) возможны любые цифры; б) все цифры различные?

Задача 1.11. Сколькими способами можно выделить делегацию в составе трех человек, выбирая их среди четырех супружеских пар, если:

а) в состав делегации входят любые трое из данных восьми человек;

б) делегация должна состоять из двух женщин и одного мужчины;

в) в делегацию не входят члены одной семьи?

Практическая работа № 9.

Тема: Размещения, сочетания и перестановки

Цели: Закрепить навыки решения задач на размещения, сочетания, перестановки

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

Опр.**Перестановками** из *n* разных элементов называются соединения, которые состоят из *n* элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из п элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле $\boldsymbol{P_n = n!}$

n! (n – факториал) $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\ n$

Пример.Сколькими способами можно разместить 12 человек за столом, на котором поставлены 12 приборов?

Решение

$\boldsymbol{P_{12} = 12!} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\ 12 = 479\,001\,600$ Ответ: 479 001 600

Опр.

Комбинации из *m* элементов по *n* элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются **размещениями.**

Обозначаются A_m^n и вычисляются по формуле $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, $A_n^n = n!$

Пример

Сколько существует вариантов распределения трёх призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

Решение

$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$ *Ответ:* 210 вар

Опр. **Сочетаниями** называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

Обозначают C_m^n и вычисляют по формуле $C_n^m = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$

Пример

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 2 карты?

Решение

$C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)! \cdot 2!} = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = 630$

Ответ: 630 способов

Ход работы

1. Прочитать теоретический материал
2. Посмотреть применение формул на примере задач
3. Выполнить задание по вариантам

1 вариант.

1. Вычислить: 1) P_7 ; 2) A_8^3; 3) C_8^5
2. Вычислить: 1) $\frac{10\,!}{8! \cdot 3!}$; 2) $\frac{8! - 6!}{5!}$
3. Решить задачи:
   1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из 9 предметов?
   2) В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?
   3) Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в 6 классных комнатах (по одной группе в комнате)?

Записать разложение Бинома: $(x-2)^4$

2 вариант.

1. Вычислить: 1) P_6 ; 2) A_8^5; 3) C_8^3
2. Вычислить: 1) $\frac{6! \cdot 4!}{8!}$; 2) $\frac{9! - 7!}{6!}$
3. Решить задачи:
   1) Сколькими способами можно выбрать для подарка 4 предмета из 8 предметов?
   2) Имеются 3 билета на просмотр 3-х различных кинофильмов. Сколькими способами 8 друзей могут распределить между собой эти 3 билета?

Сколькими разными способами можно составить график очерёдности ухода в отпуск 8 сотрудников лаборатории?

Записать разложение Бинома: $(3x-2)^4$

Практическая работа № 10

Тема: Вычисление вероятностей. Представление числовых данных

Цель: Закрепить навыки вычисления вероятностей, представления числовых данных

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

Классическое определение вероятности.
Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A_1 к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е.
$P(A) = \frac{m}{n}$ – вероятность случайного события
Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. $0 \le P(A) \le 1$
Невозможному событию соответствует вероятность P(A)=0, а достоверному – вероятность P(A)=1
Теоремы сложения вероятностей.
Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:
P(A+B)=P(A)+P(B);
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.
Теорема сложения вероятностей совместных событий.
Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:
P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)
Для трех совместных событий имеет место формула:
P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)

Событие, противоположное событию А (т.е. ненаступление события А), обозначают $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$
Вероятность наступления события А, вычисленная в предположении, что событие В уже произошло, называется**условной вероятностью** события А при условии В и обозначается $P_B(A)$ или P(A/B).
Если А и В – независимые события, то
$P(B)- P_A(B)= P_{\overline{A}}(B)$.
События А,В,С,… называются **независимыми в совокупности,** если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.
Теоремы умножения вероятностей.
Теорема умножения вероятностей независимых событий.
Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:
P(AB)=P(A)•P(B)
Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле:
$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n)$.
Теорема умножения вероятностей зависимых событий.
Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:
$P(AB)=P(A) \cdot P_A(B)=P(B) \cdot P_B(A)$
Ход работы
1. Прочитать теоретический материал
2. Посмотреть решение задач, переписать задачи в тетрадь
Задача 1.
В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?
Решение: Событие А-билет выигрышный. Общее число различных исходов есть n=1000
Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле $P(A)=\frac{m}{n}$, получим $P(A)=\frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Задача 2.

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение: Событие А-появление черного шара. Общее число случаев n=5+3=8

Число случаев m, благоприятствующих появлению события А, равно 3

P(A)= $\frac{m}{n}$ = $\frac{3}{8}$ = 0,375

Задача 3.

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение: Событие А- появление двух черных шаров. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12+8) по 2

n=C_{20}^2= $\frac{20\cdot19}{1\cdot2}$ = 190

Число случаев m, благоприятствующих событию А, составляет

n=C_2^8= $\frac{8\cdot7}{1\cdot2}$ = 28

P(A)= $\frac{m}{n}$ = $\frac{28}{190}$ = $\frac{14}{95}$ = 0,147

Задача 4.

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.

Задача 5.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно

Задача 6.

В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение: Пусть А - появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события А и В независимы. Найдем P(A)=4/12=1/3, P(B)=3/12=1/4, получим

P(AB)=P(A)•P(B)=(1/3)•(1/4)=1/12=0,083

Задача 7.

В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение: Введем следующие обозначения: А – первая взятая деталь стандартная; В – вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет P(A)=8/12=2/3. Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т.е. условная вероятность события В, равна P_A(B)=7/11.

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

P(AB)=P(A)• P_A(B)=(2/3)•(7/11)=14/33=0,424

Самостоятельное применение знаний, умений и навыков.

3. Выполнить задание по вариантам

Вариант 1.

Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?

Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты она три раза упадет гербом к верху?

Вариант 2.

Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30?

В НИИ работает 120 человек, из них 70 знают английский язык, 60 – немецкий, а 50 – знают оба. Какова вероятность того, что выбранный наудачу сотрудник не знает ни одного иностранного языка?

Практическая работа №10

Тема: Вычисление вероятностей. Представление числовых данных.
Цель работы: научиться строить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины;
составлять закон распределения дискретной случайной величины.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Сведения из теории:
Случайное событие может состоять, в частности, в появлении некоторого числа, значение которого не может быть однозначно определено условиями его возникновение. Такие события называют случайными величинами. В этой трактовке мы сохраняем классический подход к понятию случайного события. Однако требование корректности в построении математических теорий заставляет нас вновь обратиться к аксиоматическому подходу, сохранив классические модели в качестве наглядных образцов из сферы практических приложений.
Математически корректно определить случайную величину как числовую функцию, заданную в пространстве элементарных событий.

Предположим вначале, что пространство элементарных событий является конечным множеством. Соответствующую ему случайную величину называют дискретной: она может принимать лишь конечное число значений, каждому из которых может быть сопоставлена вероятность его появления в опыте. Поэтому дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень всех ее возможных значений, а $p_1, \ldots, p_n$ – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины.
События $X=x_i$, (i=1, 2, ,3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:
$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.
Пример 1.
Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.
Решение:
искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5, 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – 2 случая и третьему – 1 случай. Найдем их вероятности:
$P(x_1)$=47/50=0,94;
$P(x_2)$=2/50=0,04;
$P(x_3)$=1/50=0,02.
Тогда закон распределения случайной величины имеет вид:

X_i	0	5	30
p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $p_1+p_2+p_3$=0,94+0,04+0,02=1.
Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

2 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

3 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	20	30	40
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X – сумма очков при обоих подбрасываниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

4 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	5	1041 5	15	20
p	0,1	0,3	0,2	0,4

2) В коробке находятся 7 карандашей, из которых 4 – красные. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

5 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	*2*	4	5	6
p	0,1	0,2	0,5	0,2

2) Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

6 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,1	0,3

2) Стрелок делает по мишени два выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

7 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	1	4	7	10
p	0,3	0,4	0,2	0,1

2) В коробке находятся 9 карандашей, из которых 4 – синие. Наудачу берут три карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных синих карандашей?

8 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	10	3045 0	5
p	0,3	0,5	0,2

2) Игральную кость бросают трижды. Случайная величина X – сумма очков при трех подбрасываниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

9 вариант

1) Построить многоугольник (полигон) распределения дискретной случайной величины *X*,

заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

2) Стрелок делает по мишени четыре выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,2. Построить ряд распределения числа попаданий.

Контрольные вопросы:
Дайте определение случайного события.
Что называется случайной величиной?
Поясните закон распределения дискретной случайной величины.

Практическая работа №11
Тема: Понятие о задачах математической статистики. Решение практических задач с применением вероятностных методов
Цель: научиться применять формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины;
Сведения из теории:
Случайные величины (дискретные и непрерывные) характеризуются своим законом распределения. Заметим, что это исчерпывающая характеристика в том смысле, что в законе распределения содержится вся информация о случайной величине. Никакой сколь угодно сложной математической обработкой наблюдаемых значений случайной величины о ней невозможно получить сведения, не содержащиеся в законе распределения. Однако этот закон часто неизвестен и о нем приходится судить на основе каких-то приближенных оценок. С другой стороны, для многих практических задач такая информация является избыточной: достаточно знать лишь некоторые количественные характеристики закона распределения.
Простейшей, но очень важной характеристикой является математическое ожидание.
Пусть, например, X - дискретная случайная величина распределена по закону:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда ее *математическое ожидание* $M(X)$ определяется равенством
$M(X)=x_1\,p_1+x_2\,p_2+\ldots+x_n\,p_n$.
Обратим внимание на то, что хотя конкретные значения величины X являются случайными, математическое ожидание $M(X)$ случайным не является.
Пусть, например, испытание состоит в бросании игрального кубика. Поскольку выпадение каждой грани равновозможно, Pi=1/6. Следовательно, математическое ожидание числа выпавших очков равно
$M(X)$ = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6 = 3,5.
Число, близкое к этому, получится, если реально бросать кубик много раз и подсчитать сумму очков, деленную на число бросков.
Математическое ожидание и среднее арифметическое случайной величины - важные характеристики закона распределения, но, зная только их, мы имеем еще весьма одностороннее представление о нем. Не ясно, например, как велики могут быть отклонения значений величины от этих характеристик. Ведь одно и то же значение среднего арифметического наблюдаемых значений может получиться как в случае, когда все значения находятся вблизи среднего, так и в случае сколь угодно больших отклонений от него в сторону больших и меньших величин.
Для того чтобы характеризовать в среднем величины таких отклонений, вводится еще один важный параметр закона распределения, называемый дисперсией.
Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:
$D\{X) = M[X- M(X)]^2$.
Так же дисперсию можно вычислить и по формуле:
$D\{X) = M(X^2)- [M(X)]^2$,

т. е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Многие случайные величины, встречающиеся на практике, имеют размерность. Например, величины, которые встречаются при различных измерениях. Тогда, если, скажем, случайная величина измеряется в метрах, то дисперсия будет иметь размерность м^2. Поэтому вводится еще одна характеристика, называемая *средним квадратическим отклонением*, обозначается: $\sigma = \sqrt{D(X)}$. ее размерность совпадает с размерностью случайной величины.

Пример 1.

Пусть X – число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение:

случайная величина X – число очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон её распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда её математическое ожидание:

$$M(X)= 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5 .$$

Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

x_1^0=1-3,5; x_2^0=2-3,5; x_3^0=3-3,5; x_4^0=4-3,5; x_5^0=5-3,5; x_6^0=6-3,5.

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\frac{1}{6}((1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2)=\frac{35}{12}.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1) Монету подбрасывают 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа появлений герба.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2 вариант

1) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	4	7	10	13
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

2) Монету подбрасывают 6 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения «решки».

4 вариант

1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
p	0,15	0,17	0,35	0,21	0,12

2) Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – выпадения герба.

5 вариант

1) Найти математическое ожидание и

6 вариант

1) Найти математическое ожидание и

<table>
<tr>
<td>дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>10</td><td>30</td><td>40</td><td>60</td><td>70</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,3</td><td>0,13</td><td>0,45</td><td>0,1</td><td>0,02</td></tr>
</table>
3) Игральную кость подбросили 7 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.</td>
<td>дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,11</td><td>0,2</td><td>0,22</td><td>0,37</td></tr>
</table>
3) Игральную кость подбросили 5 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию числа невыпадения единицы.</td>
</tr>
<tr>
<td>7 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,125</td><td>0,375</td><td>0,5</td></tr>
</table>
2) Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.</td>
<td>8 вариант
1) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной таблицей распределения:
<table>
<tr><td>X</td><td>10</td><td>30</td><td>50</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0,175</td><td>0,35</td><td>0,475</td></tr>
</table>
2) Игральный кубик имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4, 5, 6. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит кубик.</td>
</tr>
</table>

Контрольные вопросы:

Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
Что называется дисперсией дискретной случайной величины?

Практическая работа №12

Тема: Решение прикладных задач

Цель: Отработать навыки решения задач на перестановки, сочетания и размещения, навыки применения правил комбинаторики.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Порядок выполнения работы:

1. Ответьте на контрольные вопросы:
   а) Что называется перестановками, размещением и сочетанием?
   б) Чем отличается сочетания от размещений и перестановок?
   в) Сформулируйте основные правила комбинаторики?

2. Изучить условие заданий для практической работы. Оформить отчет о работе.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.

Задача 1. Сколькими способами можно разместить 5 цветочных горшков на подоконнике?

Задача 2. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Задача 3 Из 9 учащихся нужно составить группу из 3 человек для участия в мероприятии. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 4. 20 студентов из группы уже получили зачет по физике. 13 студентов получили зачет по химии. А 7 студентов получили зачеты и по физике и по химии. Сколько человек в группе всего?

Вариант 2.

Задача 1. Сколькими способами можно разместить на полке 5 книг?

Задача 2. Сколькими способами можно составить команду из 3 человек для участия в мероприятии, если выбрать нужно из 8 претендентов.

Задача 3. Имеется 4 компьютеров и три пользователя. Сколькими способами можно рассадить каждого?

Задача 4. 16 студентов группы летом будут работать, 15 - поедут отдыхать, из них 5 будут работать, а затем поедут отдыхать. Сколько человек всего в группе?

Практическая работа № 13
Тема: Взаимное расположение прямых и плоскостей
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник
Ход работы:
Ответить на вопрос и выполнить рисунок.
1.Прямые m и n лежат в одной плоскости. Могут ли эти прямые пересекаться, быть параллельными, могут ли они скрещиваться?
2. Прямые b и c пересекаются. Как расположена прямая b относительно прямой d, если c∥d?
3. Даны скрещивающиеся прямые c и d. Как может быть расположена прямая c относительно m, если m ∥ d?
4. Прямые b и d пересекаются. Как расположена прямая b относительно c, если c и d пересекаются?
5. Даны скрещивающиеся прямые m и n. Как может быть расположена прямая m относительно прямой c, если c и n пересекаются?
II. Выполнить рисунок и заполнить таблицу.
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина B_1C_1, F – середина D_1C_1, K – середина DC, O – точка пересечения диагоналей квадрата ABCD.

	Прямые	Взаимное расположение прямых
1	AA_1 и CC_1	
2	A_1C_1 и B_1D_1	
3	A_1C_1 и C_1D_1	
4	A_1M и CC_1	
5	A_1D и DC_1	
6	A_1C_1 и BD	
7	A_1C и AC	
8	A_1B и D_1C	
9	A_1C и BB_1	
10	A_1D и AB	
11	A_1M и BC	
12	A_1M и BK	
13	C_1K и B_1F	
14	C_1O и AB_1	
15	A_1O и B_1D	

III. Указания к выполнению
1.Прочитать соответствующий заданию раздел по учебному пособию «Геометрия» Л. С. Атанасян, введение страницы 3-7, глава I §1 страницы 9-12, §2 страницы 15-16,глава II§1 страница 34.
2.Найти ответы на вопросы
Контрольные вопросы
1.Что изучает стереометрия?
2. Какие существуют основные фигуры в пространстве?
3. Какие аксиомы существуют в стереометрии?
4. Какие следствия из аксиом существуют в стереометрии?
5. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
6. Какие прямые называются скрещивающимися?
7. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

Практическая работа № 14
Тема: Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах.
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

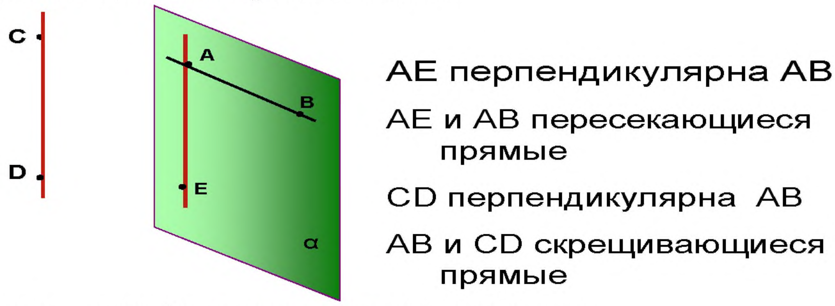
Теоретический материал

При решении задач используется определение перпендикулярных прямых в пространстве.

<u>Опр.</u>

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^{o}.

Обратить внимание на то, что в пространстве перпендикулярные прямые могут быть пересекающимися и скрещивающимися.



<u>Признак перпендикулярности прямой и плоскости</u>

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

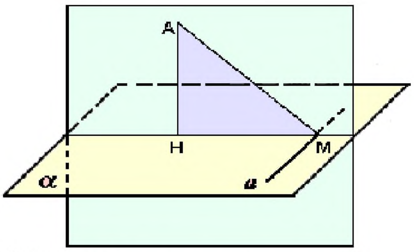
В задачах часто используется *<u>теорема о 3-х перпендикулярах</u>*:

Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

<u>Обратная теорема</u>

Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

При решении задач на нахождение угла между прямой и плоскостью необходимо помнить, что углом между прямой и плоскостью является наименьший угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.



AH- перпендикуляр

AM- наклонная

HM – проекция наклонной на данную плоскость

a - прямая, проходящая через основание наклонной

Ход работы

1. Прочитать теоретический материал
2. Посмотреть задачу с решением стр. 39 № 129 «Геометрия 10-11»
3. Решить задачу № 154 учебника «Геометрия 10-11»

Записав условие, сделав следующий чертеж:

№ 154. ***Дано:*** ΔABC, $BD \perp (ABC)$, $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA =$
$= 13$ см (рис. 4).

Найти: а) расстояние от точки D до AC;
б) $S\Delta ACD$.

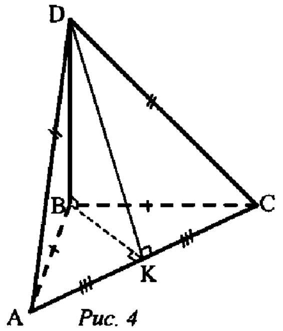


Рис. 4

4. Решить задачи по вариантам

1 вариант.

1. Дан тетраэдр МАВС, в котором
МВ $\perp$ ВА. Доказать, что ∆МВД – прямоугольный, если Д – произвольная точка отрезка АС. Найти МД и площадь ∆МВД, если
МВ = ВД = а.
2. Из точки М проведён перпендикуляр МД = 6 см к плоскости квадрата. Наклонная МО образует с плоскостью квадрата угол 60^o. О – точка пересечения диагоналей. Доказать, что ∆МОД – прямоугольный. Найти площадь квадрата.

2 вариант.

1. Четырёхугольник АВСД – квадрат, О – его центр. Прямая ОМ перпендикулярна плоскости квадрата. Доказать, что МА = МВ = МС = МД. Найдите МА, если АВ = 4 см, ОМ = 1 см.
2. Из точки М проведён перпендикуляр к плоскости ∆АВС. ВМ = 9 см, АС = 10 см,
ВС = ВА = 13 см. Найдите расстояние от точки М до прямой АС.

3 вариант.

1. Расстояние от точки М до каждой из вершин правильного треугольника АВС равна 4 см. Найти расстояние от точки М до плоскости треугольника АВС, если
АВ = 6 см.
2. Из точки М проведён перпендикуляр МВ = 4 см к плоскости прямоугольника АВСД. Наклонные МА и МС образуют с плоскостью прямоугольника углы 45^o и 30^o соответственно. Доказать, что ∆МАД и ∆МСД прямоугольные. Найти стороны прямоугольника.

4 вариант.

1. Через вершину А прямоугольного треугольника АВС с прямым углом С проведена прямая АД, перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что
∆СВД – прямоугольный. Найти ВД, если ВС = 4, ДС = 5.
2. Через вершину В ромба АВСД проведена прямая ВМ, перпендикулярная его плоскости. Найти расстояние от точки М до прямых, содержащих стороны ромба. Если АВ = 25 см, $\angle$ ВАД = 60^o, ВМ = 12,5см.

Практическая работа № 15.

Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости.
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

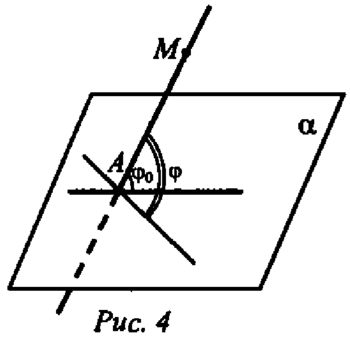


Рис. 4

Определение:

Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 4).

φ_0 – угол между прямой AM и плоскостью α является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A.

1) Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. Угол между прямой и плоскостью считается равным 90°.
2) Если прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной.

Понятие угла между прямой и плоскостью не вводим.

Угол между параллельными прямой и плоскостью считать равным 0°.

Ход урока

1. Прочитайте теоретический материал

2. Пример решения задачи

Задача

Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, если каждая из точек P и Q равноудалена от концов отрезка AB.

Решение: $PA = PB = m$; $QA = QB = n$. Точки P и Q лежат в плоскости α, проходящей через середину AB и $AB \perp \alpha$. $PQ \subset \alpha$ и $PQ \perp AB$, то есть искомый угол 90°. (*Ответ*: 90°.)

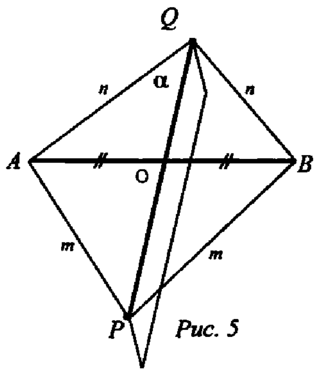
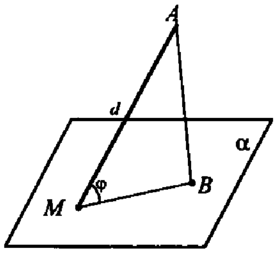


Рис. 5

Задача *Дано:* $AM = d$; $\angle AMB = \varphi$; а) 45°; б) 60°; в) 30°

Найти: МВ.

Решение:



а) $MB = d\cos\varphi = d\cdot\cos45° = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$;

б) $MB = d\cos60° = d\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{d}{2}$;

в) $MB = d\cos30° = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$.

(*Ответ*: а) $\dfrac{d\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{d}{2}$; в) $\dfrac{d\sqrt{3}}{2}$.)

3. Решите задачи самостоятельно в тетради сделав чертеж

Вариант I. **Задача № 208.**

Вариант II. **Задача № 209.** учебник «Геометрия 10-11 кл»

Практическая работа № 16

Тема: Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей

Цель: Закрепить свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей решением задач

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Ход работы

1. Прочитайте теоретический материал стр. 20-24 и 47-49
2. Ответе письменно на вопросы:

1. Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек?
2. Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны?
3. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Верно ли, что прямая m параллельна плоскости β?
4. Верно ли, что если прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая a имеет только одну общую точку?
5. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α и плоскости трапеции?
6. Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?
7. Верно ли, что линия пересечения двух плоскостей параллельна одной из этих плоскостей?
8. Верно ли, что любые четыре точки лежат в одной плоскости?
9. Верно ли, что если две стороны треугольника параллельны плоскости α, то и третья сторона параллельна плоскости α?

Посмотрите решение задач

Дано: $\alpha \parallel \beta$, α пересекается с γ (рис. 5).

Доказать, что β пересекается с γ.

Решение: Пусть γ пересекает α по прямой a. Проведем в плоскости γ прямую b, пересекающую a. Прямая b пересекает α, поэтому она пересекает параллельную ей плоскость β (задача № 55). Следовательно, и плоскость γ, в которой лежит прямая b, пересекает плоскость β.

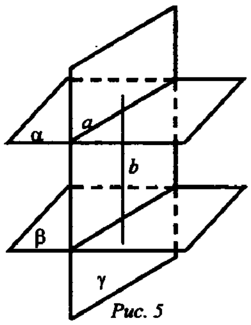


Рис. 5

2. **№ 172.** *Дано:* ΔABC, $\angle C = 90°$, AC лежит в плоскости α, угол между плоскостями α и ABC равен $60°$, $AC = 5$ см, $AB = 13$ см (рис. 4).

Найти: расстояние от точки B до плоскости α.

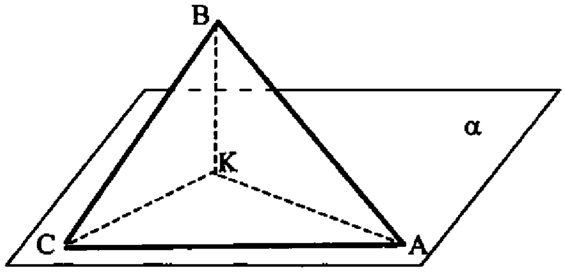


Рис. 4

Решение: Построим $BK \perp \alpha$. Тогда KC – проекция BC на эту плоскость. $BC \perp AC$ по условию, значит, по теореме о трех перпендикулярах, $KC \perp AC$. Отсюда следует, что $\angle BCK$ – линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью треугольника $\angle BCK = 60°$. Из ΔBCA по теореме Пифагора: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Из ΔBKC: $BK = = BC \cdot \sin 60° = 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3}$ (см). (*Ответ*: $6\sqrt{3}$ см.)

Решите задачи по вариантам

Вариант 1

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AB = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2.

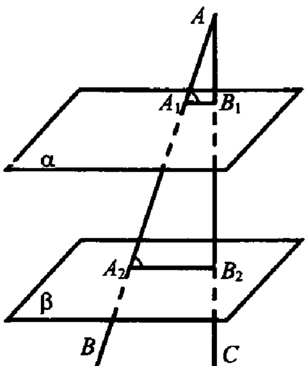


Рис. 7

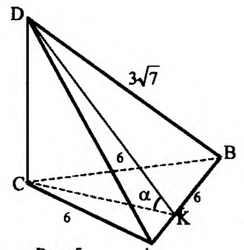


Рис. 5

№ 173. *Дано:* $ABCD$ – тетраэдр, $CD \perp (ABC)$.
$AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$ (рис. 5).
Найти: двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

Вариант 2

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AB = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).
Найти: AA_2 и AB_2.

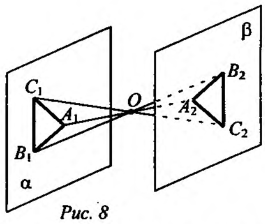


Рис. 8

№ 174. *Дано:* $ABCD$ – тетраэдр, $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90°$, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.
Найти: двугранный угол $ABCD$.
Решение:

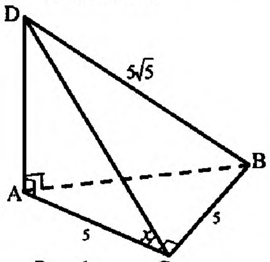


Рис. 6

Практическая работа № 17

Тема: Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.

Цель: сформировать умение применять свойства и теоремы к решению задач по изучаемой теме.

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал, сделайте краткую запись в тетради.
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.

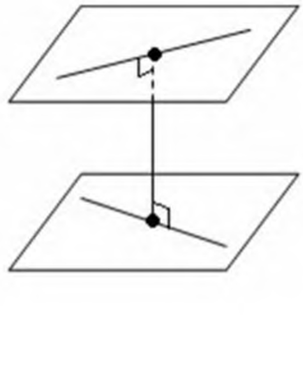
Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости — длина перпендикуляра, опущенного на плоскость из любой точки этой прямой.

Расстояние между двумя плоскостями определяется величиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки взятой на одной плоскости, на другую плоскость.



Задания для самостоятельного решения.

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^0$) катет AC равен 8 см. Из вершины B к плоскости данного треугольника проведен перпендикуляр BD. Расстояние между точками A и D равно 10 см. Найдите расстояние от точки D до катета AC.
2. В единичном кубе $A \dots D_1$ найдите расстояние между вершиной A и:
а) вершиной C_1; б) ребром CC_1; в) гранью BB_1C_1C.
3. Точка M удалена от всех вершин прямоугольного треугольника на расстояние a. Гипотенуза треугольника равна c. Найдите расстояние от точки M до плоскости данного треугольника.
4. В кубе $A \dots D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися ребрами AB и B_1C_1.

Вариант 2

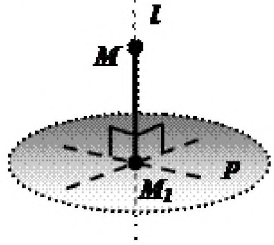
1. Катеты прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^0$) равны 15 см и 20 см. Из вершины C к плоскости треугольника проведен перпендикуляр CD, равный 5 см. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB.
2. В единичном кубе $A \dots D_1$ найдите расстояние между вершиной D_1 и:
а) вершиной B; б) ребром AB; в) гранью BB_1C_1C.
3. Из точки K на плоскость b опущен перпендикуляр длиной d и проведены две наклонные, углы которых с перпендикуляром составляют 30^0. Угол между наклонными равен 60^0. Найдите расстояние между основаниями наклонных.
4. В кубе $A \dots D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися ребрами DC и BB_1.

Практическая работа № 18

Тема: Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции .Изображение пространственных фигур.
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник

Теоретический материал

Ортогональное проектирование является частным случаем параллельного проектирования.
Ортогональное проектирование - это такое параллельное проектирование, при котором прямая проектирования перпендикулярна плоскости проекции. Ортогональное проектирование широко применяется в техническом черчении, где фигура проектируется на три плоскости - горизонтальную и две вертикальные.

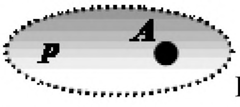


<u>Определение</u>: Ортогональной проекцией точки M на плоскость p называется основание M_1перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на плоскость p.

<u>Обозначение</u>: $MM_1 \perp p$, $MM_1 \cap p = M_1$, $np_p\ M = M_1$.

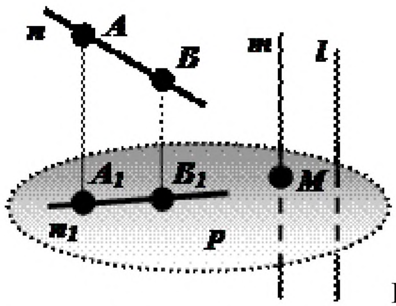
<u>Определение</u>: Ортогональной проекцией фигуры F на плоскость p называется множество всех точек плоскости, являющихся ортогональными проекциями множества точек фигуры F на плоскость p.

Ортогональное проектирование, как частный случай параллельного проектирования, обладает теми же свойствами:



При проектировании точка пространства отображается в точку плоскости проекции.
Каждая точка плоскости проекции отображается на себя.

$A \in p$; $np_p\ A = A$



Проекция прямой, не параллельной прямой проектирования, есть прямая, а проекция прямой, параллельной прямой проектирования, есть точка -точка пересечения проектируемой прямой и плоскости проекции.

p - плоскость проекции;

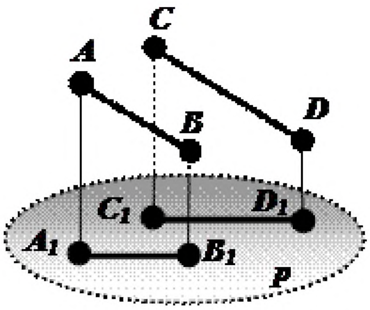
l - прямая проектирования; $l \perp p$;

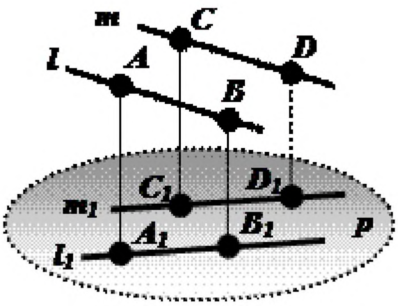
1) $пр_p\ n = n_1$;

2) $пр_p\ m = M$, $m \cap p = M$.

Проекции параллельных прямых параллельны.

$\left(n \,||\, m,\ \ пр_p\ n = n_1,\ \ пр_p\ m = m_1 \right) \Rightarrow \left(n_1 \,||\, m_1 \right)$





Отношение длин проекций двух параллельных отрезков равно отношению длин проектируемых отрезков.

$\left(AB \,||\, CD,\ \ пр_p\ AB = A_1B_1,\ \ пр_p\ CD = C_1D_1 \right) \Rightarrow \left(\dfrac{A_1B_1}{C_1D_1} = \dfrac{AB}{CD} \right)$

ПЛОЩАДЬ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Теорема: Площадь проекции плоского многоугольника на некоторую плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Выполните упражнения

Упражнения:

Какой фигурой может быть проекция:

a) прямой; b) плоскости; c) треугольника; d) окружности?

Всегда ли проекции параллельных прямых суть параллельные прямые?

На плоскости а даны две точки A и B. Отрезки AA_1 и BB_1 перпендикулярны к плоскости а . Найдите $\angle BB_1A_1$, если $\angle AA_1B_1 = 60°$.

Дан ромб с острым углом $60°$ и сторонами 25 см. Через одну из сторон проведена плоскость. Длина проекции другой стороны на эту плоскость равна 20 см. Найдите длины проекций диагоналей.

5. Найти площадь треугольника, плоскость которого наклонена к плоскости проекции под углом $30°$, если проекция его – правильный треугольник со стороной a.
6. Найти площадь треугольника, плоскость которого наклонена к плоскости проекции под углом $30°$, если проекция его – равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и основанием 12 см.
7. Найти площадь треугольника, плоскость которого наклонена к плоскости проекции под углом $30°$, если проекция его – треугольник со сторонами 9, 10 и 17 см.
8. Вычислить площадь трапеции, плоскость которой наклонена к плоскости проекции под углом $60°$, если проекция её – равнобедренная трапеция, большее основание которой 44 см, боковая сторона 17 см и диагональ 39 см

Практическая работа № 19

Тема: Взаимное расположение пространственных фигур.

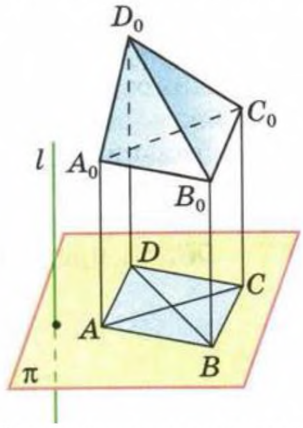
Цель: научится строить фигуры в пространстве

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник, чертежные принадлежности

Ход работы:

Прочитайте теоретический материал учебника геометрия 10-11 кл авт. А.С Атанасян стр. 220-226, выпишите определения в тетрадь



Посмотрите пример построения тетраэдра

Тетраэдр

Пусть $A_0B_0C_0D_0$ — произвольный тетраэдр, A, B, C и D — параллельные проекции его вершин на плоскость изображений (рис. 239). Отрезки AB, BC, CA, AD, BD, CD служат сторонами и диагоналями четырехугольника $ABCD$. Фигура, образованная из этих отрезков (или любая другая фигура, подобная ей), является изображением тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$.

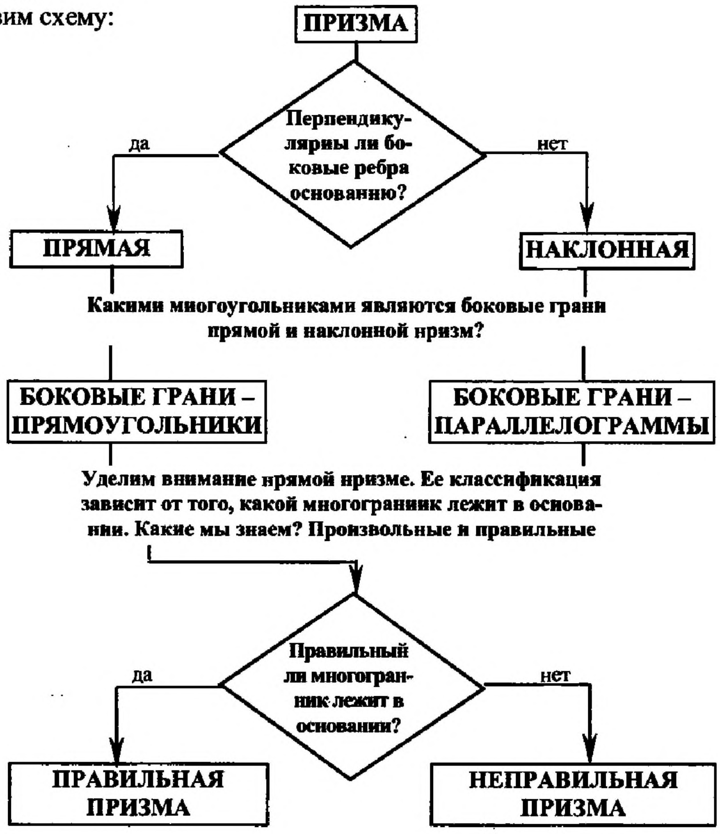
Можно доказать, что фигура, состоящая из сторон и диагоналей любого (выпуклого или невыпуклого) четырехугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования (рис. 240, *а*, *б*, *в*). (На этих рисунках невидимые ребра изображены штриховыми линиями.)

Постройте самостоятельно параллелепипед, призму, пирамиду

Практическая работа № 20
Тема: Решение задач по теме «Многогранники»
Цель: Научиться решать задачи по теме: «Многогранники»
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

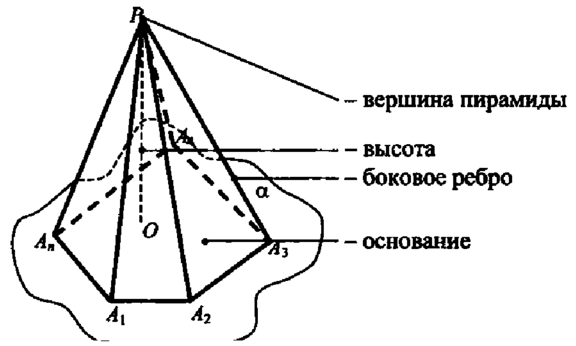
Теоретический материал

Составим схему:



Правильная призма	$S_{бок.}$	$S_{осн.}$	$S_{полн.}$
Треугольная призма	$3ah$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$a(3h + a\sqrt{3})$
Четырехугольная призма	$4ah$	a^2	$2a(h + a)$
Шестиугольная призма	$6ah$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	$3a(2h + \sqrt{3}\,a)$

Пирамида



$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}.$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot PN.$$

$S_{\text{бок.}} = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2) \cdot h$, где p_1 и p_2 периметры оснований, h – апофема.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему

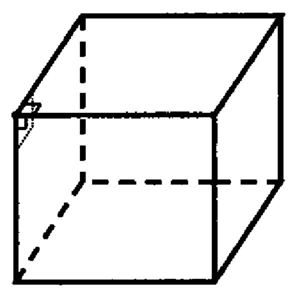
Ход работы

Прочитайте стр 60-65 учебника Геометрия 10-11 кл. А.С. Атанасян

Ответе письменно на контрольные вопросы

Контрольные вопросы

1) Объясните, что такое: а) многогранник; б) поверхность многогранника.
2) Какой многогранник называется выпуклым?
3) Дан куб – выпуклый многогранник (проверьте). Как, имея пилу, получить из деревянного куба модель невыпуклого многогранника?



4) Дан выпуклый многогранник. Что называют а) его гранью; б) его ребром; в) его вершиной?
5) Назовите известные вам многогранники.
   а) Выпуклым или не выпуклым является каждый из них? б) Сколько граней, ребер и вершин у каждого?

6) Дан квадрат. На нем как на основании построены куб и пирамида. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике? Является ли он выпуклым?
   В = 9; Г = 9; Р = 16; 9 – 16 + 9 = 2. Да.
7) Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от нее. Сколько вершин, ребер и граней в полученном много-

граннике? Является ли он выпуклым?

В = 5; Г = 6; Р = 9; 5 – 9 + 6 = 2. Да.

8) Сколько трехгранных, двугранных и плоских углов: а) у тетраэдра; б) у параллелепипеда;

Прочитайте теоретический материал

Выполните задания, самостоятельно выбрав для себя уровень сложности

I уровень

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90°$); $AC = 4$; $BC = 3$. Через сторону AC и вершину B_1 проведена плоскость. $\angle B_1AC = 60°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

II уровень

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$). Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, $\angle BA_1C = 30°$, $A_1B = 10$; $AC = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

I уровень

Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

II уровень

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

Практическая работа № 21

Тема: Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников

Цель: Научиться строить сечения многогранников

Количество часов: 2

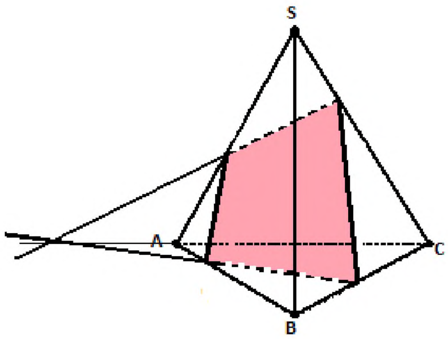
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник

Теоретический материал

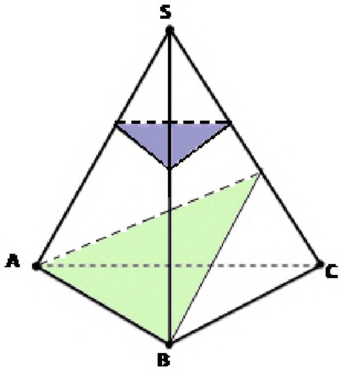
Опр.Секущей плоскостью называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам.

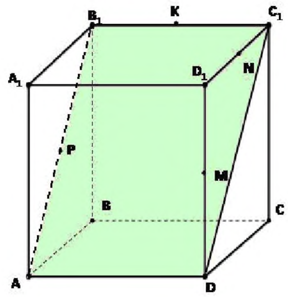
Опр.Многогранник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.. Так как*тетраэдр* имеет 4 грани, то его сечениямимогут быть только

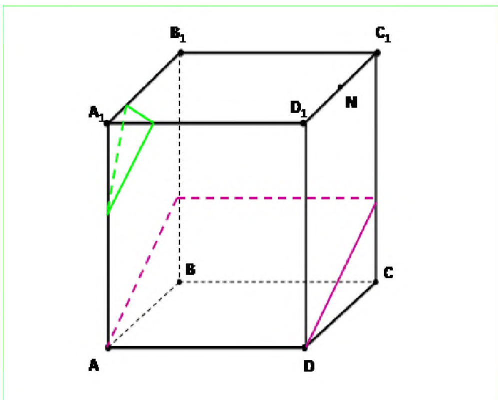


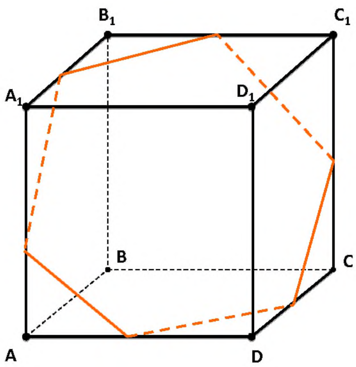
треугольники могут быть только треугольники и



Параллелепипед имеет 6 граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники.
При построении сечений параллелепипеда следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны.

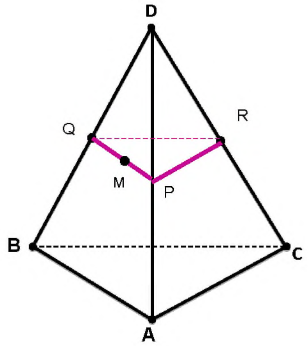






<u>*Задача*</u>

Точка M лежит на боковой грани ADB. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельно основанию ABC.
Решение



α - секущая плоскость.

$$\alpha \cap (ABD) = QP, QP \mid\mid AB$$

$$т.к. \quad \alpha \mid\mid (ABC) \Rightarrow \alpha \mid\mid AB, \alpha \mid\mid BC, \alpha \mid\mid CA \quad \alpha \cap (BDC) = QR, QR \mid\mid BC$$

$$\alpha \cap (ADC) = PR, \; PR \mid\mid AC$$

Отсюда вытекает следующий *способ построения искомого сечения*.
Проведём через точку M прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрами DA и DB. Затем через точку P проведём прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR – искомое сечение.

Ход работы:

Прочитать теоретический материал, построить сечения в тетради

Выполнить задания по вариантам

вариант.

1) Дан тетраэдр DABC. Точка M – середина ребра AD. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через т.M и параллельно грани ABC. Найти периметр сечения, если ребро тетраэдра равно ***a***.
2) Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью ABC_1. Докажите, что построенное сечение является параллелограммом.
3) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение плоскостью ACD_1 и найдите периметр сечения, если ребро куба равно ***a.***

2 вариант.

1) Дан тетраэдр DABC. Точка M – середина ребра AB. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через т.M и параллельно грани DBC. Найти периметр сечения, если ребро тетраэдра равно ***a***.
2) Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью ACC_1. Докажите, что построенное сечение является параллелограммом.
3) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка К – середина ребра B_1C_1 Постройте сечение плоскостью, проходящей через точки A, B, K и найдите периметр сечения, если ребро куба равно ***a***.

Практическая работа № 22

Тема: Площадь поверхности. Вычисление площадей
Цель: Научиться решать задачи на хождение площадей поверхностей многогранников
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник,

Ход работы

Прочитайте теоретический материал п.р № 75-76

Решите задачи, выберите уровень сложности

I уровень

Вариант I

1) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. *Найдите* площадь боковой поверхности призмы, если ее наибольшая боковая грань – квадрат.
2) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4 см и образует с плоскостью основания пирамиды угол 45°.
   а) *Найдите* высоту пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.

Вариант II

1) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см и катетом 12 см. *Найдите* площадь боковой поверхности призмы, если ее наименьшая боковая грань – квадрат.
2) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{6}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.
   а) *Найдите* боковое ребро пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.

II уровень

Вариант I

1) Основание прямого параллелепипеда – ромб с диагоналями 10 и 24 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. *Найдите* площадь полной поверхности параллелепипеда.
2) Основание пирамиды – правильный треугольник с площадью $9\sqrt{3}$ см^2. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья – наклонена к ней под углом 30°.
   а) *Найдите* длины боковых ребер пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.

Вариант II

1) Основание прямого параллелепипеда – ромб с меньшей диагональю 12 см. Большая диагональ параллелепипеда равна $16\sqrt{2}$ см и образует с боковым ребром угол 45°. *Найдите* площадь полной поверхности параллелепипеда.
2) Основание пирамиды – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $4\sqrt{2}$ см. Боковые грани, содержащие катеты треугольника, перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом 45°.
   а) *Найдите* длины боковых ребер пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.

Практическая работа № 23

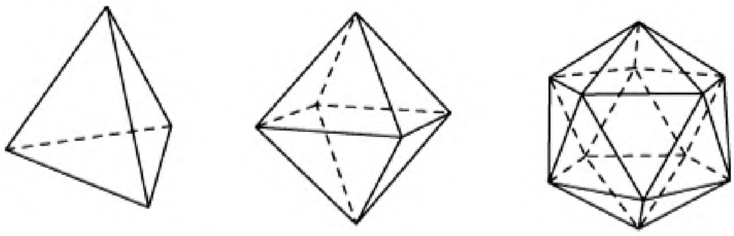
Тема: Представление о правильных многогранниках

Цель: познакомиться с определением правильных многогранников. Научиться строить правильные многогранники.

Сведения из теории:

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. слева). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также *правильным тетраэдром*, или просто *тетраэдром*, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.



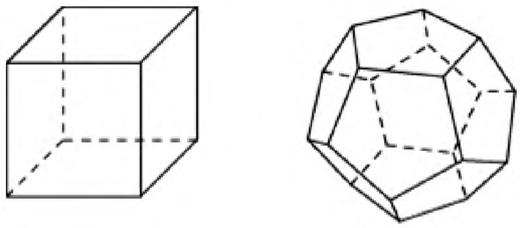
Правильные многогранники

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке посередине. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром*.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром*.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника, не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. слева), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром*.



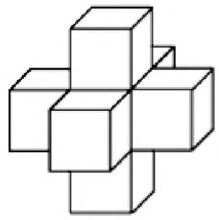
Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром.*

Задания для самостоятельного решения:

1) Чему равны плоские углы додекаэдра?

2) Представьте многогранник – бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли он правильным многогранником?

3) Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов – рис. 60) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин B и ребер P?



4) Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами.

5) Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение правильного многогранника.
2. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Практическая работа № 24

Тема: Виды симметрий в пространстве. Симметрия тел вращения и многогранников
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта**,** тетради, учебник,

Теоретический материал

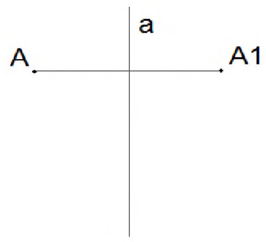
Опр. (центральная симметрия)

Точки М и M_1 называются симметричными относительно т О (центр симметрии), если О – середина отрезка MM_1. Точка О считается симметричной самой себе.

т. М и т.M_1 симметричны относительно т.О.
т. О – центр симметрии
т.О – середина отрезка MM_1
т.О отображается сама на себя

Опр. (осевая симметрия)

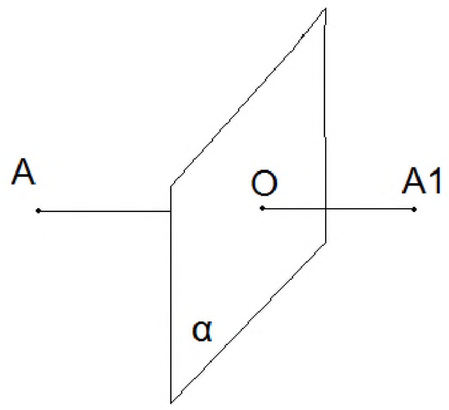
Точки А и A_1 называются симметричными относительно прямой *a* (ось симметрии), если прямая *a* проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка



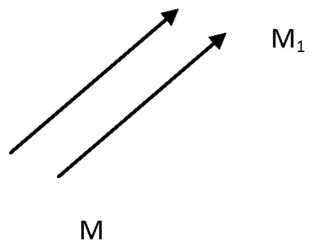
прямой*a* считается симметричной самой себе.

Опр. (зеркальная симметрия)

Точки AA_1 называются симметричными относительно плоскости α(плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости считается симметричной самой себе.



Опр . Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{p}$ называется отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в точку M_1 , что $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{p}$



В геометрии фигура может иметь один или несколько центров симметрии (осей). Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани-равные правильные многогранники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Примером правильного многогранника является куб.

Докажем, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще при $n \geq 6$.

При $n \geq 6$ угол каждого многоугольника больше или равен 120°. С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трёх плоских углов. Но $120° \cdot 3 = 360°$.

По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной 3, 4, 5 правильных треугольников, 3 квадратов или 3 правильных пятиугольников. Значит, есть только 5 правильных многогранников. Приложение 7.

Тетраэдр – четырёхгранник.

Гексаэдр – шестигранник (куб).

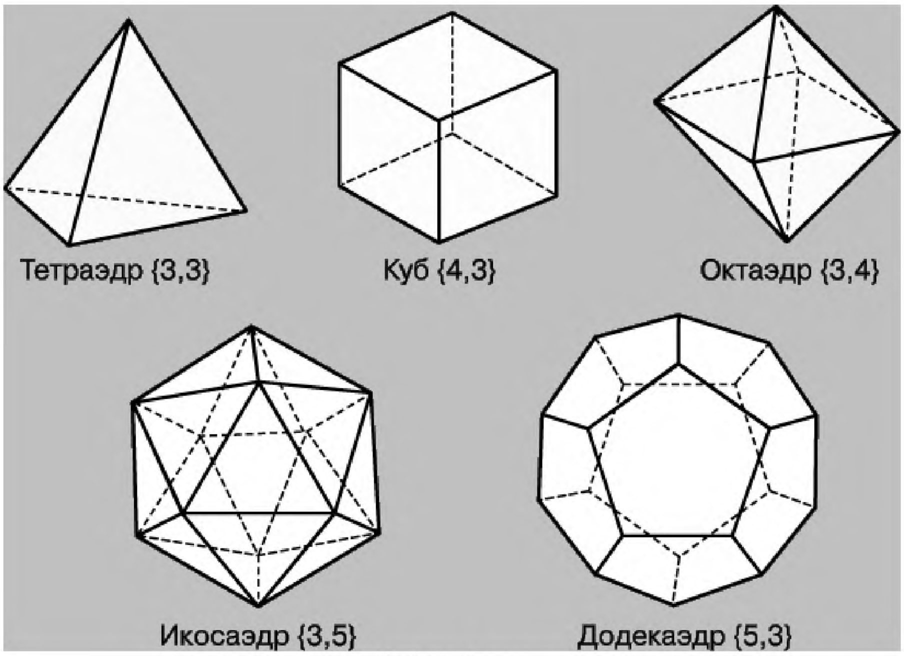
Октаэдр – восьмигранник.

Икосаэдр – двадцатигранник.

Додекаэдр - двенадцатигранник.

Правильные многогранники с древних времён привлекли к себе внимание учёных, архитекторов, художников.

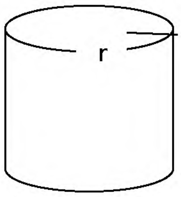
Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон. Поэтому их называют телами Платона. Правильным многогранникам посвящена 13 книга «Начал» Евклида. Платон считал, что атомы огня имеют форму тетраэдра, земли- гексаэдра, воздуха- октаэдра, воды- икосаэдра, вся вселенная – форму додекаэдра.



Ход работы

Прочитайте теоретический материал
Ответите письменно на вопросы:
Какие виды симметрии вам знакомы из планиметрии?
Какие свойства симметрии вы знаете?
Какие многоугольники имеют: 1) Центр симметрии;
Ось симметрии?
Какие многогранники имеют симметрию? Перечислить.
Допишите пропущенные слова вместо …… .
5. Многогранник, у которого …… правильные …… называется правильным.
6. Куб – правильный многогранник, у которого ….. квадрат.
7. Тетраэдр – правильный …… , у которого грани - …… .
3. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните:

Практическая работа №25
Тема: Решение задач по теме «Тела вращения». Площадь поверхности. Вычисление площадей поверхностей
Цель: Применение знаний при решении задач.
Количество часов: 4
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,
Теоретический материал



h

Цилиндр
h – высота цилиндра, *r* – радиус основания

$S_{бок.} = 2\pi R\mathrm{h}$, $S_{полн.} = 2\pi R^2 + 2\pi R\mathrm{h}$, $S_{полн.} = 2\pi R(R + \mathrm{h})$, где
R – радиус основания цилиндра;
з h – высота цилиндра. адача

Решение:
1. ΔABC – прямоугольный.
2. Так как $\angle BAC = 45°$, то ΔABC – равнобедренный, значит, $AC = BC = 5$.
3. Так как $AC = 5$, AC – диаметр, то $R = 2{,}5$.
4. $S_{полн.} = 2\pi R(H + R)$, где $H = 5$, $S_{полн.} = 2\pi \cdot 2{,}5$ $(5 + 2{,}5) = 5\pi \cdot 7{,}5 = 37{,}5\pi$.

Ответ: $37{,}5\pi$.

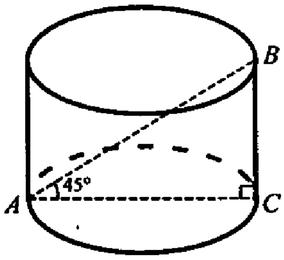
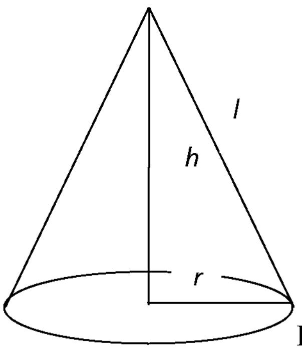


Рис. 1



Конус

h– высота конуса, r - радиус основания, l - образующая конуса.

Итак, ***площадь боковой поверхности конуса*** равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

3) ***Площадью полной поверхности конуса*** называется сумма площадей боковой поверхности и основания.

$$S_{бок.} = \pi r l \qquad S_{полн.} = \pi r(l + r).$$

Задача № 563. *Дано*: конус, $OP = 1{,}2$ см, $S_{осев.} = 0{,}6$ см^2 (рис. 8).

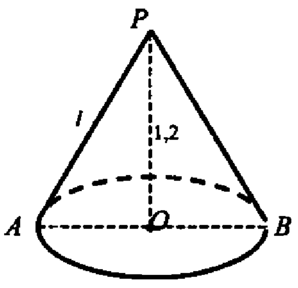


Рис. 8

Найти: $S_{полн.}$

Решение:

1) Осевое сечение – треугольник: высота 1,2 см и основание $2r$. $S_{осев.} = \frac{1}{2} \cdot 2rH$;

$S_{осев.} = rH$; $r = \frac{S}{H}$; $r = \frac{0{,}6}{1{,}2} = 0{,}5$; $r = 0{,}5$ см.

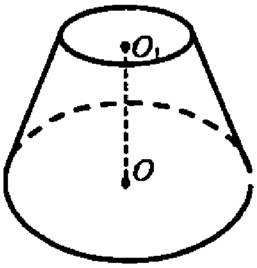
2) Из ΔAOP по теореме Пифагора $l = AP = \sqrt{OP^2 + OA^2}$; $l = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}44 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$;

$L = 1.3$ см.

3) $S_{полн.} = \pi r\ (r + l)$; $S_{полн.} = \pi 0{,}5\ (0{,}5 + 1{,}3) = \pi \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}8 = 0{,}9\pi$.

(*Ответ*: 0.9π см^2.)

Полная поверхность усеченного конуса $S_{п.} = \pi \cdot (lR + lR_1 + R^2 + R_1^2)$.



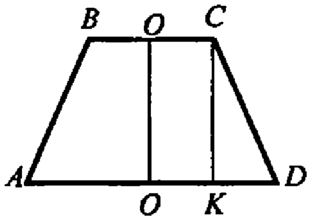


Рис. 2

Дано: усеченный конус, $OD = 7$ см, $CD = 5$ см, $OO_1 = 4$ см (рис. 2).

Найти: $S_{\text{сеч.}}$, $S_{\text{бок.}}$

Решение: Осевым сечением усеченного конуса является равнобедренная трапеция. $S_{\text{сеч.}} = \frac{BC + AD}{2} \cdot OO_1$. $S_{\text{бок.}} = \pi(O_1C + OD) \cdot CD$. ΔCKD – прямоугольный, по теореме Пифагора $KD = \sqrt{CD^2 - KC^2}$ $KC = OO_1 = 4$ (см) $KD = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ (см) $O_1C = OD - KD = 7 - 3 = 4$ (см), $BC = 2O_1C = 8$ (см); $AD = 2OD = 14$ (см). $S_{\text{сеч.}} = \frac{8+14}{2} \cdot 4 = 22 \cdot 2 = 44$ (см^2). $S_{\text{бок.}} = \pi(4 + 7) \cdot 5 = 55\pi$ (см^2). (*Ответ*: $S_{\text{сеч.}} =$ 44 см^2, $S_{\text{бок.}} = 55\pi$ см^2.)

Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки.

Дайте определение сферы.

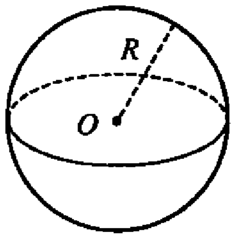


Рис. 7

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Данная точка O называется центром сферы, а данное расстояние – радиусом сферы. Обозначается R. Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы. Диаметр сферы равен $2R$. Вспомните определение круга.

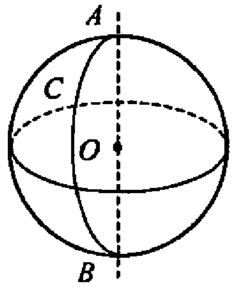


Рис. 8

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.

Дайте определение шара:

Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Существует и другое определение шара:

Шаром радиуса R с центром в точке O называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая O), и не содержит других точек.

в прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром C (x_0, y_0, z_0) имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Задача № 580. *Дано*: шар. $R = 41$ дм. $d = 9$ дм (рис. 5).

Найти: $S_{сеч.}$

Решение: $d < R$, значит, сечением шара плоскостью является круг. $S_{сеч.} = \pi r^2$. ΔAOK – прямоугольный, по теореме Пифагора $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм). $S_{сеч.} = \pi r^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм^2). (*Ответ*: 1600π дм^2.)

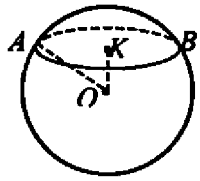


Рис. 5

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Посмотрите задачи, проанализируйте и запишите в тетрадь

Выполните разноуровневые задания, самостоятельно выбрав вариант сложности

Вариант 1

I уровень

Сечение шара площадью $S = 16\pi$ см^2 находится на расстоянии 3 см от центра шара.

Найдите площадь его поверхности.

II уровень

К сфере с $S = 64\pi$ см^2 проведена касательная плоскость. Кротчайшее расстояние от точки A, лежащей в этой плоскости, до данной сферы равно 1 см.

Найти расстояние от точки A до точки касания сферы с плоскостью

III уровень

Два взаимно перпендикулярных сечения сферы равноудалены от ее центра. При этом центр сферы находится на расстоянии $4\sqrt{2}$ см от общей хорды этих сечений, равной 6 см.

Найдите площадь сферы.

Практическая работа № 26

Тема: Площадь поверхности. Вычисление площадей и объемов

Цель: Применение знаний при решении задач.

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Ход работы

Повторить теоретический материал

Найдите соответствующую формулу, указав путь стрелкой:

πD	$S_{б.п.к.}$
$\pi R(1 + r)$	$S_{п.п.к.}$
$2\pi RH + 2\pi R^2$	$S_{б.п.ц.}$
πD_1	$S_{п.п.к.}$
$2\pi r$	$S_{б.п.к.}$
$2\pi RH$	$S_{б.п.ц.}$
$\pi R(1 + r)$	$S_{п.п.ц.}$
$\pi R(H + r)$	
πr_1	

Выполните задания самостоятельно выбрав уровень сложности (карточка 1- вариант 1, карточка 2 – вариант 2)

I уровень

Карточка № 1

1. Призма. Площадь боковой поверхности прямой призмы.
2. Основания прямой призмы – ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Пирамида. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды.
2. Основание прямой призмы – ромб с острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности – 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 см, а высота $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

II уровень

Карточка № 1

1. Правильные многогранники.
2. Основание прямого параллелепипеда – ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений P и Q.
3. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетом $4\sqrt{3}$ см и противолежащим углом 60°. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь

наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды.
2. Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы имеет площадь Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
3. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Высота пирамиды равна 4 см и образует со всеми боковыми ребрами углы 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

III уровень

Карточка № 1

1. Призма. Площадь боковой поверхности прямой призмы.
2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Диагональ боковой грани A_1C составляет с плоскостью грани CC_1B_1B угол 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Пирамида. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды.
2. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 17$, $DC = 28$, $AC = 39$. Диагональ боковой грани A_1D составляет с плоскостью боковой грани DD_1C_1C угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна m. Угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Практическая работа № 27

Тема: Решение задач на вычисление объемов многогранников и тел вращения

Цель: Научиться решать задачи на вычисление объемов многогранников и тел вращения

Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Теоретический материал

Объем прямоугольного параллелепипеда. Итак $V = abc$.

Задача № 649 б).

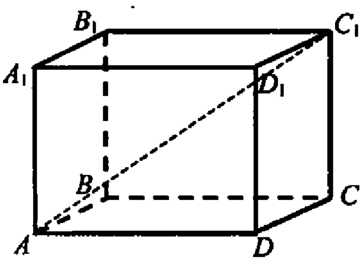


Рис. 1

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AC_1 = 3\sqrt{2}$ (рис. 1).

Найти: V.

Решение: Пусть ребро куба равно a, тогда $AC_1^2 = 3a^2$, $a = \dfrac{AC_1}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. $V = (\sqrt{6})3 = 6\sqrt{6}$ (см^3). (*Ответ*: $6\sqrt{6}$ см^3.)

Объем прямой призмы $V = S_o \cdot h$.

2. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма $\angle ACB = 90°$, $\angle CNB = 90°$, $NB = 2$, $\angle AN = 8$, $\angle C_1NC = 30°$ (рис. 4).

Найти: V.

$V = S_O \cdot h$.

$V = \dfrac{1}{2} CN \cdot BA \cdot CC_1$, $CN \perp BA$. $CN^2 = BN \cdot NA$.

$CC_1 = \text{tg}30° \cdot CN$. $V = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{80\sqrt{3}}{3}$.

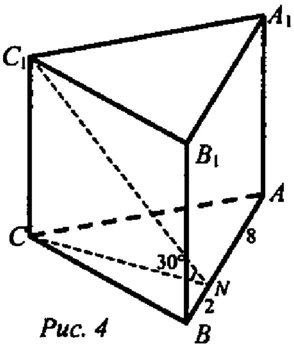


Рис. 4

Объем цилиндра $V_{\text{цил.}} = \pi r^2 h = S_{\text{осн.}} \cdot h$.

Задача № 669. *Дано*: цилиндр, $S_{\text{осн.}} = Q$, $S_{\text{сеч.}} = S$ (рис. 1).

Найти: V.

Решение: $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$, $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$, $r = \sqrt{\dfrac{S_{\text{осн.}}}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$, $r = AO$. $S_{\text{сеч.}} = AD \cdot DC$, $AD = 2r$, $DC = h$, т.е. $S_{\text{сеч.}} = 2r \cdot h$, $h = \dfrac{S}{2\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}}$, $h = \dfrac{S\sqrt{Q\pi}}{2Q}$,

$V = Q \cdot \dfrac{S\sqrt{Q\pi}}{2Q} = \dfrac{1}{2} S\sqrt{Q\pi}$. (*Ответ*: $\dfrac{1}{2} S\sqrt{Q\pi}$.)

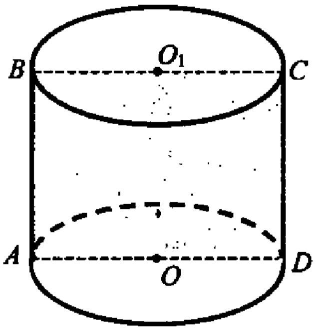
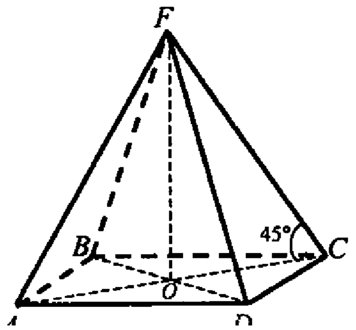


Рис. 1

Объем пирамиды V= $\dfrac{1}{3}Sh$.



2. *Дано*: $ABCDF$ – правильная пирамида. $\angle FCO = 45°$; $FO = 2$ (рис. 4).

Найти: а) $S_{осн.}$; б) V.

Решение:

1) Рассмотрим ΔFOC: $\angle O = 90°$, $\angle C = 45°$, значит, $\angle F = 45°$. Следовательно, ΔFOC – равнобедренный, $OC = FO = 2$.

$$AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

3) $ABCD$ – квадрат (пирамида правильная). $S_{осн.} = AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

4) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot h$. $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

Объем усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S_1 S})$.

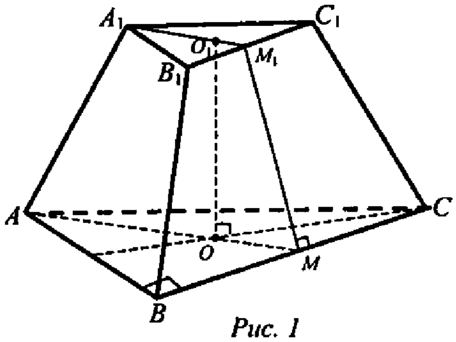


Рис. 1

Задача № 697. *Дано*: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная усеченная пирамида. $AB = a$, $A_1B_1 = 0{,}5a$. $MM_1 \perp BC$, $MM_1 = a$ (рис. 1).

Найти: $V_{ус.пир.}$ – ?

Решение:

1) Рассмотрим ΔABC, найдем AM $(AM \perp BC)$. $AM = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

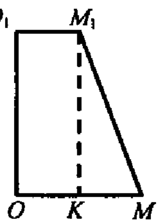


Рис. 1 а)

2) $\Delta A_1B_1C_1$, найдем A_1M_1 $(A_1M_1 \perp B_1C_1)$.

$$A_1M_1 = h_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4};$$

3) $S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$;

4) Рассмотрим прямоугольную трапецию OO_1M_1M (рис 1 *а*)): $OM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. $O_1M_1 = \frac{1}{3}A_1M_1 = \frac{a\sqrt{3}}{12}$;

$M_1K \perp OM$; $O_1M_1 = OK$. $KM = OM - O_1M_1$. $KM = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$;

Из ΔKM_1M: $\angle K = 90°$, по теореме Пифагора. $M_1K = \sqrt{MM_1^2 - KM^2}$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{144}} = \frac{a}{12}\sqrt{141}.$$

5) $V_{ус.пир} = \frac{1}{3}h(S_1 + S_1 + \sqrt{SS_1})$.

$$V_{\text{ус.пир}}=\frac{1}{3}\frac{a}{12}\sqrt{141}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{16}+\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{7\sqrt{47}a^3}{192};$$

(*Ответ*: $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$.)

Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$

Задача № 704. *Дано*: конус, $h = SO = AB = H$ (рис. 2).

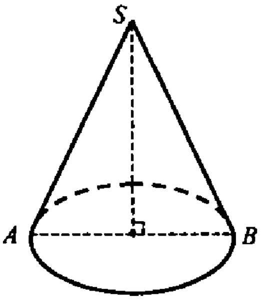


Рис. 2

Найти: V.

Решение: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$ $d = AB = H,$ $D = 2r,$

$r=\frac{d}{2}=\frac{H}{2},$ $h = H.$ $V=\frac{1}{3}\pi\frac{H^2}{4}\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{H^3}{4}=\frac{\pi H^3}{12}.$

(*Ответ*: $V=\frac{\pi H^3}{12}$.)

Ход работы:

Прочитайте теоретический материал

Внимательно посмотрите на решение задач, на нахождение объемов,

Решите задание по вариантам

Вариант 1

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а двугранный угол при основании равен 60°. *Найдите* объем пирамиды.
2. В цилиндр вписана призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30°. Диагональ большей боковой грани призмы составляет с плоскостью ее основания угол в 45°. *Найдите* объем цилиндра.

Вариант 2

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см и составляет с плоскостью основания угол в 60°. *Найдите* объем пирамиды.
2. В конус вписана пирамида. Основанием служит прямоугольный треугольник, катет которого равен $2a$, а прилежащий угол равен 30°. Боковая грань пирамиды, проходящая через данный катет, составляет с плоскостью основания угол в 45°. *Найдите* объем конуса.

Вариант 3

1. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объем призмы равен 108 см^3. *Найдите* площадь полной поверхности призмы.
2. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. *Найдите* объем цилиндра.

Практическая работа № 33

Тема: Вычисление площадей и объемов

Цель: Научиться решать задачи на вычисление площадей и объемов Количество часов: 4

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Ход работы

Повторите теоретический материал
Выполните задания
Уровень А.
Выполните тест, записав только ответ «букву»

1.Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса, на плоскость основания называется:
А) образующей Б) высотой В) диагональю Г) диаметром
2. Гранью куба является: А) ромб Б) прямоугольник В) квадрат Г) параллелограмм
3.Сечение конуса, параллельной плоскости основания будет
А) круг Б) прямоугольный треугольник В) равнобедренный треугольник
4. Прямая призма, в основании которой лежит параллелограмм называется:
А) куб Б) квадрат В) параллелепипедом Г) ромбом
Тело, состоящее из двух кругов, совмещенных параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов называется
А)цилиндром Б) конусом В) шаром Г) сферой
Объём усеченной призмы равенА) $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ Б) $V = S_{осн} H$ В) V=abc Г) $V = \pi R^2 H$
Объём наклонной призмы равен:А) V=abc Б) нет верного ответа В)V=SH Г) V=a^3
Объём шара выражается формулой:А) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Б) $V = \frac{3}{4}\pi R^3$ В) $V = \frac{4}{3}\pi R^2$ Г) $V = \frac{4}{3}\pi R$
9. Объём конуса можно вычислить по формуле:А) $V = \frac{1}{3} S$ Б) $V = \frac{1}{3} SH$ В) $V = \frac{1}{3} H$ Г) $V = SH$
10. Объём цилиндра вычисляется с помощью формулы:
А) V=abc Б) $V = \pi R^2 H$ В) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ Г) $V = \pi RH$
Прямая призма, в основании которой правильный многоугольник называется :А) многогранником Б) параллелепипедом В) правильной Г) додекаэдром
Тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного от данной точки, называется:
А) сфера Б) шар В) окружность Г) эллипс
Отрезок, соединяющий вершину конуса с точками окружности основания, называется:
А) касательной Б) диаметром В) высотой Г) образующей
Границей шара является :А) сфера Б) круг В) радиус Г) овал
Тело, состоящее из круга и точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих эту точку с точками круга, называется:
А) цилиндром Б) усечённым конусом В) конусом Г) шаром
Объём усечённого конуса выражается формулой:
А) $V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$ Б) $V = S_{осн} H$ В) $V = \frac{1}{3} SH$ Г) V=abc
Объём параллелепипеда можно найти по формуле:А) V=ab Б) V=ac В) V=bc Г) V=abc
Объём прямой призмы равен
А) $V = S_{осн} H$ Б) $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ В) $V = \pi R^2 H$ Г) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
18.Объём куба можно вычислить по формуле:А) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Б) $V = \frac{1}{3} SH$ В) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ Г) V=a^3
19. Объём пирамиды вычисляется с помощью формулы:
А) $V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$ Б) $V = S_{осн} H$ В) V=abc Г) $V = \pi R^2 H$

Уровень Б
Выполните тест, в ответе укажите только ответ «букву»

1. *Сколько* диагоналей у восьмиугольной усеченной пирамиды. а) 20; б) 28; в) 40; г) другой ответ.
2. Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна $27\sqrt{3}$ см^2, а полная поверхность – $36\sqrt{3}$ см^2. *Найдите* высоту тризмы. а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см;в) 3 см; г) другой ответ.
3. *Найдите* площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям, равным 4 см, 4 см, 6 см. а) 92 см^2; б) 128 см^2; в) 96 см^2; г) другой ответ.
4. *Найдите* площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребра AB и C_1D_1, если ребро куба равно 3 см. а) 6 см^2; б) $5\sqrt{2}$ см^2; в) $9\sqrt{2}$ см^2; г) другой ответ.
5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2 см, а сторона основания – 4 см. *Найдите* боковое ребро. а) $2\sqrt{3}$ см; б) $\sqrt{10}$ см; в) 3 см; г) другой ответ.
6. *Найдите* боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна $2\sqrt{2}$ см, а все двугранные углы при основании – 45°. а) $8\sqrt{2}$ см^2; б) $16\sqrt{2}$ см^2; в) 8 см^2; г) другой ответ.
7. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{12}$ см, а стороны основания 3 см и 7 см. *Найдите* площадь диагонального сечения. а) $10\sqrt{6}$ см^2; б) 20 см^2; в) 12 см^2; г) другой ответ.

Решите задачу

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12 см, а боковое ребро – 10 см. *Найдите*: 1) высоту пирамиды; 2) угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; 3) угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды; 4) площадь боковой поверхности пирамиды; 5) площадь полной поверхности пирамиды; 6) объем пирамиды.

Практическая работа №29
Тема: Решение задач на составление уравнений прямой, плоскости, окружности, сферы
Цели: Закрепить навыки составления уравнений прямой, плоскости, окружности, сферы
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,
Теоретический материал
Общее уравнение прямой имеет вид: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – некоторые числа. При этом коэффициенты A, B *одновременно* не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.
Уравнение прямой по точке и направляющему вектору:
Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\bar{p}(p_1; p_2)$ этой прямой, то уравнение данной прямой можно составить по формуле:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$$

Иногда его называют *каноническим уравнением прямой*.

Общее уравнение плоскости:

Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю.

Уравнение плоскости по трём точкам:

Любые ли три точки пространства задают плоскость? Нет. Во-первых, точки должны быть различными. А во-вторых, они не должны лежать на одной прямой (сразу все три).

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_0(x_0;y_0;z_0), M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$, которые не лежат на одной прямой, можно составить по формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Уравнение поверхности сферы:

Сфера радиуса R с центром в начале координат представлена уравнением второй степени.

$x^2+y^2+z^2=R^2$ (R – радиус сферы)

Сфера радиуса R центр которой не совпадает с началом координат представлена другим уравнением второй степени.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

(R - радиус сферы; a, b, c - смещение центра сферы относительно центра координат)

Ход работы

Прочитать теоретический материал

Посмотреть примеры

Решить задания по образцу

Пример: Найти уравнение прямой, проходящей через две точки: (-1, 2) и (2, 1)

Решение.

По уравнению $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

полагая в нем $x_1=-1$, $y_1=2$, $x_2=2$, $y_2=1$ (без разницы, какую точку считать первой, какую - второй), получим

$\dfrac{y-2}{1-2}=\dfrac{x+1}{2+1}$, или $\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x+1}{3}$; после упрощений получаем окончательно искомое уравнение в виде $x+3y-5=0$.

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; —3; 5) и радиусом, равным 6.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x+4)^2+(y-3)^2+z^2=100$.

Задача 4. Доказать, что уравнение

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$

является уравнением сферы.

Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1;-2;0), M_1(2;0;-1), M_2(0;-1;2)$.

$5x-y+3z-7=0$

Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1;2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2;1)$

$x-2y+3=0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0;-3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-7;5)$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0;3)$ и направляющему вектору $\bar{j}(0;1)$.

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right), B(-1; 7)$.
$AB: 28x + 15y - 77 = 0$

Ответы (один из вариантов решений):
Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.
Решение: Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; —3; 5) и радиусом, равным 6.
Решение: Подставив значение координат точки С и значение радиуса в уравнение
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ получим
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36$.
Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100$.
Решение: Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ видим, что
$a = -4$, $b = 3$, $c = 0$, $R = 10$. Следовательно, С(—4; 3; 0), R = 10.
Задача 4. Доказать, что уравнение
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$
является уравнением сферы.
Решение: Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно *x, у* и *z*:
$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 =$
$= (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 + 5 =$
$= (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 9$.
Следовательно, данная поверхность имеет уравнение
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$.
Это уравнение представляет собой уравнение сферы с центром в точке С(1; —2; 3) и радиусом R = 3
Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1; -2; 0), M_1(2; 0; -1), M_2(0; -1; 2)$.
Решение: составим уравнение плоскости по трём точкам. Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 0-1 \\ y-(-2) & 0-(-2) & -1-(-2) \\ z-0 & -1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Вот теперь и аналитически видно, что всё дело свелось к координатам двух векторов. Раскрываем определитель по первому столбцу, находим уравнение плоскости:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4+1)(x-1) - (2-1)(y+2) + (1+2)z = 0$$

$$5(x-1) - (y+2) + 3z = 0$$

$$5x - 5 - y - 2 + 3z = 0$$

$$5x - y + 3z - 7 = 0$$

Больше ничего упростить нельзя, записываем:
Ответ: $5x - y + 3z - 7 = 0$
Задача 6. Составить уравнение прямой по точке $M(1; 2)$ и направляющему вектору $\bar{p}(2; 1)$

Решение: Уравнение прямой составим по формуле $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$. В данном случае:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей:
$1 \cdot (x-1) = 2 \cdot (y-2)$

И приводим уравнение к общему виду:
$x-1 = 2y-4$

$x-2y+3=0$

Ответ: $x-2y+3=0$

Задача 7. Составить уравнение прямой по точке $M(0;-3)$ и направляющему вектору $\bar{p}(-7;5)$
Решение: Уравнение прямой составим по формуле:

$$\frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2}$$

$$\frac{x-0}{-7} = \frac{y-(-3)}{5}$$

$$5x = -7(y+3)$$

$$5x = -7y-21$$

$$5x+7y+21=0$$

Ответ: $5x+7y+21=0$

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке $A(0;3)$ и направляющему вектору $\bar{j}(0;1)$.
Решение: Используем формулу:

$$p_2 \cdot (x-x_0) = p_1 \cdot (y-y_0)$$

$$1 \cdot (x-0) = 0 \cdot (y-1)$$

$$x=0$$

Ответ: $x=0$ *(ось ординат)*

Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам $A\left(\frac{3}{2};\frac{7}{3}\right), B(-1;7)$.
Решение: Используем формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1-\frac{3}{2}} = \frac{y-\frac{7}{3}}{7-\frac{7}{3}}$$

Выполняем действия в знаменателях:

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{14}{3}}$$

Применяем метод пропорции:

$$\frac{14}{3} \cdot \left(x-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(y-\frac{7}{3}\right)$$

Именно сейчас удобно избавиться от дробных чисел. В данном случае нужно умножить обе части на 6:

$$6 \cdot \frac{14}{3} \cdot \left(x-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \cdot 6 \cdot \left(y-\frac{7}{3}\right)$$

$$28 \cdot \left(x-\frac{3}{2}\right) = -15 \cdot \left(y-\frac{7}{3}\right)$$

Раскрываем скобки и решаем уравнение:

$$28x-42 = -15y+35$$

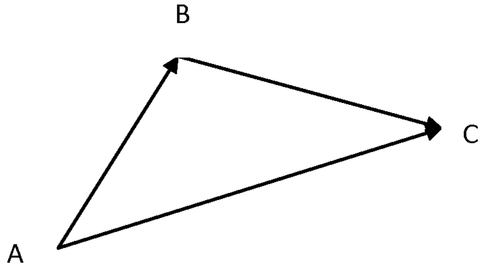
$$28x-42+15y-35=0$$

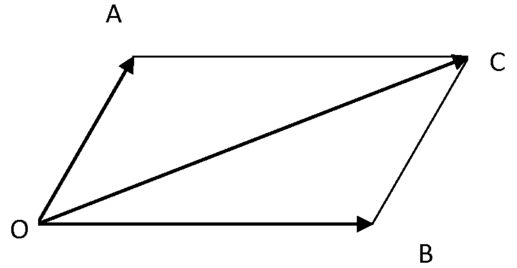
Ответ: $AB: 28x+15y-77=0$

Практическая работа №30
Тема: Решение задач на действия с векторами.
Цель: Овладеть навыками использования правил действий над векторами Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,
Теоретический материал
Основные определения, обозначения векторов, действия над векторами в пространстве аналогичны основным характеристикам вектора в пространстве.
Действия над векторами
Сложение векторов.

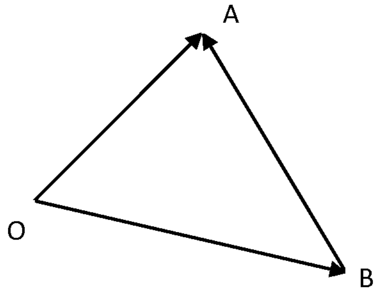
Правило треугольника Правило параллелограмма

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$





Вычитание векторов
$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$

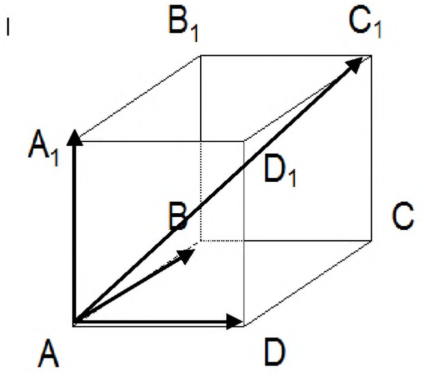


Умножение вектора на число:
Опр.

Произведением ненулевого вектора a на число k называется такой вектор $\vec{в}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ сонаправлены при k > 0 и противоположно направлены при k < 0

$\vec{a}$ $3\vec{a}$ $\vec{a}$ $-2\vec{a}$

Для сложении *некомпланарных векторов* применяют *правило параллелепипеда*



$$\vec{AA_1}+\vec{AD}+\vec{AB}=\vec{AC_1}$$

Ход работы

Прочитать теоретический материал

Выполните задание по вариантам

1 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед $ABCДA_1B_1C_1Д_1$, обозначьте вектор $\vec{СД}$ и $\vec{ВС}$ соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$. *а)* Изобразите на рисунке векторы $\vec{a}+\vec{в}$, $\vec{a}-\vec{в}$, $2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{в}$

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$

в) Разложите вектор $\vec{BD_1}$ по векторам $\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{BB_1}$

2 вариант

1) Нарисуйте параллелепипед $ABCДA_1B_1C_1Д_1$, обозначьте вектор $\vec{СД}$ и $\vec{АД}$ соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$. *а)* Изобразите на рисунке векторы $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{c}$

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\vec{DA}+\vec{DC}+\vec{DD_1}$

в) Разложите вектор $\vec{B_1D_1}$ по векторам $\vec{A_1A}$, $\vec{A_1B}$, $\vec{A_1D_1}$

Практическая работа № 31

Тема: Решение задач на нахождения расстояния между точками

Цель: Научиться решать задачи на нахождения расстояния между точками

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Выполните задание по вариантам

Вариант I

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{C_1D_1}$.

а) $\overrightarrow{C_1A_1}$; в) $\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{AC}$; г) правильного ответа нет.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектор $\overrightarrow{MK}$, если M — середина A_1D_1 и K — середина CC_1.

а) $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; в) $\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

3. Даны координаты точек:
$A(-3; 2; -1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(1; -4; 3)$, $D(-1; 2; -2)$.

Найдите $|2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}|$.

а) $\sqrt{433}$; б) $\sqrt{521}$; в) $\sqrt{487}$; г) $\sqrt{395}$.

4. Даны координаты точек:
$C(3; -2; 1)$, $D(-1; 2; 1)$, $M(2; -3; 3)$, $N(-1; 1; -2)$.

Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

а) 0,75; б) 0,6; в) 0,7; г) $\frac{2}{3}$.

5. При каком значении (значениях) k векторы $\vec{a}(6 - k; k; 2)$ и $\vec{b}(-3; 5 + 5k; -9)$ перпендикулярны?

а) 2; б) 3; в) 2; −3,6; г) 3; −2,4.

6. При каком значении a векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $A(-2; -1; 2)$, $B(4; -3; 6)$, $C(-1; a - 1; 1)$, $D(-4; -1; a)$?

а) 1; б) −2; в) 2; г) −1.

7. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Найдите $\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b}$.

а) 0,07; б) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; г) 0,08.

8. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60°$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120°$.

а) $3\sqrt{2}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{13}$; г) $2\sqrt{3}$.

Вариант II

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC}$.

а) $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{DB}$; г) $\overrightarrow{C_1B}$.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{l}$.

Выразите через векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{l}$ вектор $\overrightarrow{KP}$, где K — середина CC_1, P — середина AD.

а) $-\frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} - \vec{l}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{l}$;

б) $\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - \vec{l}$; г) $\frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} - \vec{l}$.

3. Даны координаты точек:
$C(-4; -3; -1)$, $D(-1; -2; 3)$, $M(2; -1; -2)$, $N(0; 1; -3)$.
Найдите $|3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{MN}|$.

а) $\sqrt{329}$; б) $\sqrt{413}$; в) $\sqrt{397}$; г) $\sqrt{366}$.

4. Даны координаты точек:
$A(1; -1; -4)$, $B(-3; -1; 0)$, $C(-1; 2; 5)$, $D(2; -3; 1)$.
Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

а) 0,8; б) −0,5; в) −0,7; г) 0,6.

5. При каком значении (значениях) m векторы $\vec{a}(4; m - 1; m)$ и $\vec{b}(-2; 4; 3 - m)$ перпендикулярны?

а) 4; б) −3; в) −3; −2; г) 3; 4.

6. При каком значении a векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны, если $C(-3;\ 2;\ 4)$, $D(1;\ -4;\ 2)$, $M(1;\ -2;\ a)$, $N(-1;\ a+3;\ -1)$?

а) -2; б) -3; в) 1; г) -1.

7. Дано: $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$. Найдите $\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{m} + \vec{n}$.

а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{7}}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

8. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120^\circ$.

а) $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{31}$; в) $\sqrt{29}$; г) $\sqrt{33}$.

Практическая работа № 32

Тема: Скалярное произведение векторов, решение задач на нахождение векторного уравнения прямой и плоскости

Цель: закрепить умения выполнять действия над векторами

Количество часов: 2

Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Теоретический материал

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) \qquad (3)$$

Если векторы заданы своими координатами $\bar{a}\{x_1; y_1\}$ *и* $\bar{b}\{x_2; y_2\}$, то скалярное произведение находят так:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \qquad (4)$$

<u>Пример 4</u> В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 4, найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

Решение: так как углы в равностороннем треугольнике по 60^0, то, используя формулу (3), получим $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$.

Ответ: 8.

Используя формулы (1), (3), (4),можно вывести формулу для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle(\bar{a}; \bar{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \qquad (5)$$

<u>Пример </u>5 Найти угол А в треугольнике ABC, если A(6;7), B(3;3), C(1;-5).

Решение: Определим координаты векторов $\overline{AB}\{-3;-4\}, \overline{AC}\{-5;-12\}$. Вычислим косинус угла между векторами по формуле (5):

$$\cos\angle(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{-3 \cdot (-5) + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}} = \frac{63}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65}.$$

$$\angle(\overline{AB}; \overline{AC}) = \arccos\frac{63}{65}.\ \textit{Ответ}: \arccos\frac{63}{65}.$$

Ход работы

Прочитайте теоретический материал

Посмотрите примеры решения, выполните задания по образцу

Задание

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{BC};\quad \overrightarrow{BC}$ *и* $\overrightarrow{CD}$

4 Найти $\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD}+\overline{AC}\right)$

6 Выяснить, коллинеарные ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Исходные данные:

Даны точки $A(6,3,3),\quad B(-1,0,-2),\quad C(3,1,1),\quad D(0,4,5).$

Задание 1

Решение:

$$\overrightarrow{AB}=\{-1-6;0-3;-2-3\}=\{-7;-3;-5\};$$

$$\overrightarrow{BC}=\{3+1;1-0;1+2\}=\{4;1;3\};$$

$$\overrightarrow{CD}=\{0-3;4-1;5-1\}=\{-3;3;4\};$$

$$\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CD}=\{-7-3\cdot 4+4\cdot(-3);-3-3\cdot 1+4\cdot 3;-5-3\cdot 3+4\cdot 4\}=$$
$$\{-31;6;2\}$$

Задание 2

Решение:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{83}$$

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(4)^2+(1)^2+(3)^2}=\sqrt{26}$$

$$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{(-3)^2+(3)^2+(4)^2}=\sqrt{34}$$

Задание 3

Решение:

$$\cos\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}=\frac{-7\cdot 4-3\cdot 1-5\cdot 3}{\sqrt{83}\sqrt{26}}=\frac{-46}{\sqrt{2158}};$$

$$\cos\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD}=\frac{4\cdot(-3)+1\cdot 3+3\cdot 4}{\sqrt{26}\sqrt{34}}=\frac{3}{\sqrt{884}}$$

Задание 4

Решение:

Даны точки $A(6,3,3),\quad B(-1,0,-2),\quad C(3,1,1),\quad D(0,4,5).$

$$\overrightarrow{AB}=\{-7;-3;-5\};\quad \overrightarrow{CD}=\{-3;3;4\};$$

$$\overrightarrow{AD}=\{0-6;4-3;5-3\}=\{-6;1;2\};$$

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\{-7+(-3),-3+3,-5+4\}=\{-10,0,-1\}$$

$$\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{AD}=-10\cdot(-6)+0\cdot 1+(-1)\cdot 2=58$$

Задание 5

Решение:

$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$,
$\overline{BD} = \{0-(-1), 4-0, 5-(-2)\} = \{1, 4, 7\}$,
$\overline{AC} = \{3-6, 1-3, 1-3\} = \{-3, -2, -2\}$,
$\overline{BD} + \overline{AC} = \{1+(-3), 4+(-2), 7+(-2)\} = \{-2, 2, 5\}$.

$$Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD} + \overline{AC}\right) = \frac{-7\cdot(-2)+(-3)\cdot 2+(-5)\cdot 5}{\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}} = \frac{-17}{\sqrt{83}}.$$

Задание 6
Решение:
$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$, $\overline{CD} = \{-3, 3, 4\}$
$\frac{-7}{-3} \neq \frac{-3}{3} \neq \frac{-5}{4} \Rightarrow$ векторы не являются коллинеарными.

Задание 7
Решение:
$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$, $\overline{CD} = \{-3, 3, 4\}$
$-7\cdot(-3)+(-3)\cdot 3+(-5)\cdot 4 = -8 \neq 0$, следовательно, векторы не являются ортогональными.

Задания к практической работе.

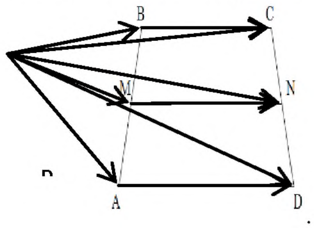
1 A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)
2 A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)
3 A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)
4 A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)
5 A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)
6 A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)
7 A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)
8 A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)
9 A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)
10 A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)
11 A (1; 0; 1); B (7; 4; 3); C (3; -5; 1); D (-2; 2; 2)
12 A (5; 1; 0); B (-1; -1; -1); C (2; 4; 7); D (1; 0; 1)
13 A (10; 1; 1); B (-2; -1; 1); C (4; 3; 2); D (1; 0; -1)
14 A (2; -7; 4); B (2; -1; 3); C (1; 0; -1); D (2; 1; 3)
15 A (6; 3; 3); B (-1; 0; -2); C (3; 1; 1); D (0; 4; 5)
16 A (3; 2; 0); B (2; -1; 7); C (4; 0; 5); D (1; -2; -1)
17 A (4; -1; 2); B (1; 0; 3); C (-2; 1; 5); D (3; 8; -1)
18 A (1; 1; -3); B (-7; 5; 2); C (2; 1; 0); D (3; -3; 1)
19 A (5; 0; 1); B (2; -1; -1); C (-6; -1; 1); D (3; 1; 3)
20 A (3; 5; 1); B (7; -4; 3); C (2; 1; 1); D (0; -1; 3)
21 A (1; -2; 1); B (-1; 8; -3); C (3; 2; 1); D (5; 3; 1)
22 A (-3; -1; 1); B (2; -3; 0); C (1; 4; 5); D (2; 3; 4)
23 A (3; -1; 2); B (4; 0; 4); C (-1; 9; -1); D (3; -2; -2)
24 A (3; -2; 1); B (4; 2; 1); C (-1; -1; 1); D (3; 0; 1)
25 A (-2; 0; 1); B (4; -1; 3); C (-3; 2; 1); D (4; 1; 1)

Практическая работа №33

Тема: Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.
Цель: закрепить умения применять правила действия над векторами при решении математических и прикладных задач.
Количество часов: 2
Оснащение рабочего места: инструкционная карта, тетради, учебник,

Сведения из теории:
Рассмотрим задачи трёх типов, которые целесообразно решать с помощью векторов.
Первый тип: задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскости

Пример 1.
Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противолежащих сторон четырехугольника, равен половине векторной суммы двух других противолежащих сторон.
Решение:
пусть *ABCD* – четырехугольник, *M* – середина *AB*, *N*– середина *CD*. Тогда необходимо доказать, что $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$.
Пусть *O* – произвольная точка плоскости, соединим ее с вершинами и серединами двух сторон четырехугольника, выполним рисунок



По правилу деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

По правилу треугольника, имеем:

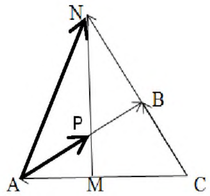
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}).$$

Задача для самостоятельного решения №1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Второй тип: задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в заданном отношении

Пример 2.
На стороне *AC* треугольника *ABC* взята точка *M* так, что $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|$, а на продолжении стороны *BC* такая точка *N* что $\left|\overrightarrow{BN}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. В каком отношении точка *P* пересечения *AB* и *MN* делит каждый из этих отрезков.
Решение:
выполним рисунок соответствующий условию задачи:



Пусть и $\dfrac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x,\ \dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$.

Выберем базисные векторы $\overrightarrow{CB} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами:

а) $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$, тогда $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y}{y+1}$, т.к. векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AB}$ сонаправлены, то

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1}(\vec{a} - \vec{b}).$$

Т.е.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1}\vec{a} - \frac{y}{y+1}\vec{b}.$$

б) $\dfrac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x$, тогда, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{x+1}\overrightarrow{AM} + \dfrac{x}{x+1}\overrightarrow{AN}$.

Но, по условию задачи $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{4}\left|\vec{b}\right|$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{x}{x+1}(2\vec{a} - \vec{b}).$$

В полученном выражении раскроем скобки, упростим, тогда получим:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2x}{x+1}\vec{a} - \frac{1+4x}{4(x+1)}\vec{b}.$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим систему:

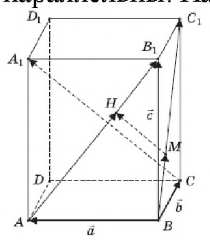
$$\begin{cases} \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{2x}{x+1}, \\ \dfrac{y}{y+1} = \dfrac{1+4x}{4(x+1)} \end{cases}.$$

Решая систему любым известным способом (сложением, подстановкой), получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, точка P делит отрезок AB в отношении 2:3 и отрезок MN в отношении 1:4.

Задача для самостоятельного решения №2. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков



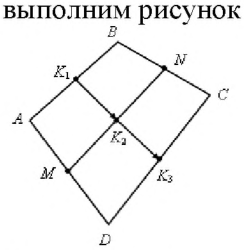
Третий тип: задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой

Пример 3

Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем $AM{:}MD=BN{:}NC=3{:}4$. Докажите, что середины отрезков AB, MN и CD лежат на одной прямой.

Решение:

выполним рисунок соответствующий условию задачи



Пусть K_1 – середина AB, K_2 – середина MN, K_3 – середина CD. Используя формулы деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),$$

$$\overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия $AM{:}MD=BN{:}NC=3{:}4$ следует, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Т.о., векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1, K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Задача для самостоятельного решения №3. В пространстве расположены отрезки AB и A_1B_1. Точка M есть середина отрезка AB, точка M_1 – середина A_1B_1. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, и MM_1 расположены на одной прямой.

Контрольные вопросы:

Приведите примеры задач, которые целесообразно решать с помощью векторов.